



juillet 2025

Sujet de Mathématiques

Durée : 4 h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2025, est composé d'un exercice et d'un problème indépendants à traité dans l'ordre souhaité.

Pour répondre à une question donnée du sujet, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précèdent, même s'il ne les a pas traitées, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner avec précision les **références** des questions abordées.

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice

À propos de dérangements d'un ensemble fini

Notations, définitions et rappels

Si n est un entier naturel non nul ; on pose $E_n = \{1, \dots, n\}$.

- On appelle *permutation* de E_n toute bijection de E_n sur lui-même.
- Si σ est une permutation de E_n , on la note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.
- Si σ est une permutation de E_n , on appelle *point fixe* de σ tout élément $k \in E_n$ tel que $\sigma(k) = k$.
- On appelle *dérangement* de E_n , toute permutation de E_n n'ayant aucun point fixe.
- On note \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de E_n et \mathcal{D}_n l'ensemble des dérangements de E_n .
- On rappelle que le cardinal de \mathcal{S}_n vaut $n!$ et on note d_n le cardinal de \mathcal{D}_n .

1.1. Écrire la liste des éléments de chacun des ensembles \mathcal{S}_2 et \mathcal{S}_3 .

1.2. Donner les valeurs de d_1 , d_2 et d_3 .

1.3. Une première expression du nombre de dérangements

Soit n un entier naturel non nul ; pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note \mathcal{F}_k l'ensemble des permutations de E_n ayant exactement k point(s) fixe(s) et on pose $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.3.1. Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que $\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$.

1.3.2. Montrer que les ensembles $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ sont deux à deux disjoints et que $n! = \sum_{k=0}^n \text{card}(\mathcal{F}_k)$.

1.3.3. Déterminer $\text{card}(\mathcal{F}_n)$ et $\text{card}(\mathcal{F}_0)$ puis montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\text{card}(\mathcal{F}_k) = \binom{n}{k} d_{n-k}$.

1.3.4. En déduire que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$.

1.3.5. Déduire de ce qui précède que $n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = d_n$.

1.4. Une deuxième expression du nombre de dérangements

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

1.4.1. Montrer que les suites $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

1.4.2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

1.4.3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $|x_n - \ell| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

1.4.4. On admet que $\ell = \frac{1}{e}$; montrer que pour tout entier $n > 2$, d_n est la partie entière du réel $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.

1.5. Probabilité qu'une permutation soit un dérangement

Soit n un entier naturel non nul; on note p_n la probabilité qu'une permutation choisie au hasard (ie. de façon équiprobable) dans \mathcal{S}_n soit un dérangement.

1.5.1. Exprimer p_n en fonction de n .

1.5.2. La suite $(p_n)_{n \geq 1}$ admet-elle une limite? Si oui laquelle?

1.6. Une application probabiliste

Soit n un entier naturel non nul. On répartit au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n urnes également numérotées de 1 à n , en plaçant une seule boule par urne. On note X_n la variable aléatoire qui à une telle répartition associe le nombre de coïncidences entre le numéro de l'urne et celui de la boule qu'elle reçoit.

1.6.1. Déterminer la probabilité $P(X_n = 0)$ de l'événement $\{X_n = 0\}$ et en déduire une expression de la probabilité $P(X_n \geq 1)$.

1.6.2. Démontrer que pour tout entier $q \in E_n$, $P(X_n = q) = \frac{1}{q!} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$.

1.6.3. Montrer que l'espérance de la variable aléatoire X_n est indépendante de l'entier n .

Problème

Étude de quelques propriétés des fonctions absolument monotones

Notations, définitions et rappels

- ✓ Dans ce problème, \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels et \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels. Si $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial défini par : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- ✓ On note $\exp : x \mapsto e^x$ (resp. $\ln : x \mapsto \ln(x)$) la fonction exponentielle (resp. logarithme népérien).
- ✓ **Dérivées successives, classe d'une fonction** : Soient I un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur I ; soit n un entier naturel non nul.
 - On dit que la fonction f est une fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I ; dans ce cas, on pose $f^{(1)} = f'$, où f' est la fonction dérivée de f ; $f^{(1)}$ est appelée la *fonction dérivée d'ordre 1 (ou première)* de la fonction f .
 - On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si la fonction $f^{(1)}$ est dérivable sur I ; dans ce cas, on pose $f^{(2)} = (f^{(1)})'$, où $(f^{(1)})'$ est la fonction dérivée de $f^{(1)}$; $f^{(2)}$ est appelée la *fonction dérivée d'ordre 2 (ou seconde)* de la fonction f et peut aussi se noter f'' .
 - Par récurrence, on dit que la fonction f est n -fois dérivable sur I si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I ; dans ce cas, on pose $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, où $(f^{(n-1)})'$ est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$; $f^{(n)}$ est appelée la *fonction dérivée d'ordre n (ou n -ième)* de la fonction f .
 - On dit que f est de classe \mathcal{C}^p , $p \geq 1$, sur I si elle est p -fois dérivable sur I et $f^{(p)}$, sa dérivée d'ordre p , est de plus continue sur I . Par convention, on pose $f^{(0)} = f$ et on dit que f est de classe \mathcal{C}^0 sur I si elle est continue sur I .
 - On dit que f est *indéfiniment dérivable* (ou de classe \mathcal{C}^∞) sur I si elle est p -fois dérivable sur I , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
- ✓ On admet que le produit (resp. la composée) de deux fonctions p -fois dérivables (resp. de classe \mathcal{C}^p) est p -fois dérivable (resp. de classe \mathcal{C}^p), où $p \in \mathbb{N}^*$.
- ✓ **Formule de LEIBNIZ¹ pour la dérivée d'un produit** : Soient I un intervalle non trivial de \mathbb{R} et n un entier naturel non nul. On considère deux fonctions numériques $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -fois dérivables sur I . Alors, la fonction fg est n -fois dérivable sur I et on a la formule dite de Leibniz :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

- ✓ **Définition :** Soit I un intervalle non trivial de \mathbb{R} . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **absolument monotone** sur I si elle est indéfiniment dérivable sur I et vérifie :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times I, \quad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Le problème comporte quatre parties et il a pour but d'étudier quelques propriétés remarquables des fonctions absolument monotones. La première partie est consacrée à l'étude de quelques exemples et résultats généraux de ces fonctions. La seconde partie porte sur la formule de Taylor avec reste intégrale et une application à l'exponentielle. La troisième partie entame l'étude d'un théorème de Bernstein donnant une égalité étendue entre une fonction absolument monotone et son développement de Taylor. La quatrième partie est consacrée à l'étude de quelques autres propriétés des fonctions absolument monotones.

1^{ère} Partie

Quelques exemples et résultats généraux sur les fonctions absolument monotones

1.1. Premiers exemples

1.1.1. Montrer que la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est absolument monotone sur \mathbb{R} .

1.1.2. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$ définie sur l'intervalle $]0, 1[$. Justifier que la fonction f est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0, 1[$, on calcule les dérivées successives et montrer que la fonction f est absolument monotone sur $]0, 1[$.

1.1.3. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients d'une fonction polynomiale réelle pour qu'elle soit absolument monotone sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1.2. Un autre exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto -\ln(1-x)$ définie sur l'intervalle $]0, 1[$.

1.2.1. Justifier que la fonction f est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]0, 1[$ et préciser, pour tout entier $n \geq 1$, l'expression de $f^{(n)}(0)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les deux fonctions u_n et v_n sur l'intervalle $]0, 1[$ par :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad u_n(x) = \ln(1-x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \quad \text{et} \quad v_n(x) = u_n(x) + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

1.2.2. Soit $n \geq 1$. Justifier que les fonctions u_n et v_n sont dérivables sur l'intervalle $]0, 1[$ et donner, sous forme simplifiée, des expressions de leur dérivée. En déduire les signes des fonctions u_n et v_n .

1.2.3. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right)_{n \geq 1}$ converge vers $-\ln(1-x)$. On écrit alors :

$$-\ln(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

1.3. Quelques résultats généraux

Soient I et J deux intervalles non triviaux de \mathbb{R} .

1.3.1. Justifier que toute fonction f absolument monotone sur I est positive, croissante et convexe sur I .

1.3.2. Montrer qu'une fonction f est absolument monotone sur I si, et seulement si, elle est positive, dérivable sur I et sa fonction dérivée f' est absolument monotone sur I .

1.3.3. Soient f et g deux fonctions absolument monotones sur l'intervalle I . Montrer que les fonctions $f+g$ et fg sont absolument monotones sur I .

1.3.4. Montrer que si f est absolument monotone sur I , alors la fonction e^f est absolument monotone sur I . On pourra raisonner par récurrence.

1.3.5. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ définie sur l'intervalle $]0, 1[$. Montrer que g est absolument monotone sur l'intervalle $]0, 1[$. On pourra considérer $h : x \mapsto \ln(g(x))$ et calculer h' .

1.3.6. Montrer plus généralement que si $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument monotone sur J et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument monotone sur I , avec $\varphi(J) \subset I$, alors la fonction $f \circ \varphi$ est absolument monotone sur J . On pourra exploiter une récurrence bien énoncée pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ \varphi)^{(n)} \geq 0$.

2^{ème} PartieFormule de TAYLOR² avec reste intégrale
Application à la fonction exponentielle

2.1. Formule de Taylor avec reste intégrale

Soit I un intervalle non trivial de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} , où $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(a, b) \in I^2$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose :

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt.$$

2.1.1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_k.$$

2.1.2. En déduire la formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégrale suivante :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

2.2. Étude de quelques suites de nombres réels

2.2.1. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \geq 0}$ soit convergente de limite nulle. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

2.2.2. Soit λ un nombre réel strictement positif. Montrer que la suite $\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite nulle.

2.3. Application au calcul de la limite d'une suite

2.3.1. Justifier que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$, $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.

2.3.2. Montrer que, pour tout réel non nul x et tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

2.3.3. En déduire la limite de la suite $\left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt\right)_{n \geq 1}$, pour tout réel x .

2.3.4. Montrer que pour tout réel x , la suite numérique $\left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite e^x . On écrit

alors :

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3^{ème} PartieApplication au développement en série entière
d'une fonction absolument monotone
Théorème de BERNSTEIN³

3.1. Théorème de Bernstein sur un intervalle de la forme $[0, a]$, avec $0 < a \leq +\infty$

Soient $a \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle $]0, a[$ telle que sa restriction à l'intervalle $]0, a[$ soit une fonction **absolument monotone** sur $]0, a[$; en particulier f vérifie :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0, a[, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

² TAYLOR, math. anglais (1685-1731)

³ BERNSTEIN, math. russe (1880-1968)

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times]0, a[$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$.

3.1.1. Montrer soigneusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) \geq 0$.

3.1.2. Montrer que pour tout $x \in]0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

3.1.3. Montrer que, pour tout $x \in]0, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$ et $0 \leq S_n(x) \leq f(x)$.

3.1.4. Montrer que pour tout $x \in]0, a[$, la suite numérique $(S_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente. On posera alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x).$$

3.1.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir que la fonction $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$, définie sur l'intervalle $]0, a[$, est croissante.

3.1.6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $x \in]0, a[$ et tout $y \in]x, a[$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

3.1.7. En déduire que pour tout $x \in]0, a[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

3.2. Extension du théorème de Bernsteïn à un intervalle de la forme $] -a, a[$, avec $0 < a \leq +\infty$

Soient $a \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ et f une fonction absolument monotone sur l'intervalle $] -a, a[$, c'est-à-dire que f est de classe C^∞ sur l'intervalle $] -a, a[$ et vérifie :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times] -a, a[, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times] -a, a[$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$.

3.2.1. Justifier que, pour tout $x \in]0, a[$, la suite numérique $(S_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente de limite $f(x)$.

3.2.2. Montrer que pour tout $b \in]0, a[$, la suite numérique $\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} b^n\right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite nulle.

3.2.3. Montrer que, pour tout $x \in] -a, a[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} |x|^{n+1}$ puis en déduire que la suite numérique $(S_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente de limite $f(x)$. On posera alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$.

3.3. Application à la fonction tangente

Dans cette section, on considère la fonction $f : x \mapsto \tan x$, définie sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3.3.1. Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et préciser l'expression de f' en fonction de f .

3.3.2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que pour tout entier non nul n ,

$$f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}.$$

3.3.3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

Dans la suite, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3.4. Soit $n \in \mathbb{N}$; exprimer a_{n+1} en fonction de a_0, \dots, a_n puis calculer les coefficients a_0, \dots, a_6 .

3.3.5. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$.

3.3.6. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, la suite numérique $\left(\sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1}\right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite $\tan x$. On distinguera les cas $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et $x \in]\frac{\pi}{4}, 0[$.

$$\tan x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}.$$

4^{ème} Partie

D'autres propriétés des fonctions absolument monotones

4.1. Théorème de Bernstein sur \mathbb{R}

Soit f une fonction absolument monotone sur \mathbb{R} ; en particulier f vérifie :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

Pour tout triplet $(n, x, x_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose $S_{n, x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

4.1.1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant la section 3.2. de la partie précédente, montrer que pour tout réel x , la suite numérique $(S_{n, x_0}(x))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$. On posera alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x).$$

4.1.2. En déduire que si f s'annule en un point $b \in \mathbb{R}$, alors f est identiquement nulle.

4.1.3. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(p)}(c) = 0$. Montrer que la fonction $f^{(p)}$ est identiquement nulle. Que peut-on alors dire de f ?

4.2. Application à l'étude d'autres propriétés des fonctions absolument monotones

Soit f une fonction absolument monotone et non identiquement nulle sur \mathbb{R} . Soit $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.

4.2.1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x - a)^k \right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite $(x - a)f'(x)$.

4.2.2. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k(k-1) (x - a)^k \right)_{n \geq 0}$ est convergente de limite $(x - a)^2 f''(x)$.

4.2.3. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2 (x - a)^k \right)_{n \geq 0}$ converge vers $(x - a)^2 f''(x) + (x - a)f'(x)$.

4.2.4. On suppose de plus que $a < x$. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x - a)^k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k^2 (x - a)^k \right),$$

puis en déduire que

$$(x - a)f'(x)^2 \leq f(x)((x - a)f''(x) + f'(x)).$$

4.2.5. Déduire de ce qui précède que $f'^2 \leq f f''$.

4.2.6. Montrer que f est strictement positive et que la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$ est convexe sur \mathbb{R} .

4.3. Soit f une fonction absolument monotone sur \mathbb{R} telle que $f(0) = f'(0) = 1$. Montrer que f est strictement positive et que, pour tout réel x , $f(x) \geq e^x$.

FIN DU SUJET