Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale du Préscolaire et des Sports

Académie Hassan II des Sciences Et Techniques

Juillet 2026 — Sujet de Mathématiques — Durée : 4 h

*Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2026, est composé d'un problème comportant sept parties.*

*Pour répondre à une question donnée du sujet, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précèdent, même s'il ne les a pas traitées, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.*

*Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner avec précision les* références *des questions abordées.*

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

# Problème

## Polynômes et nombres de Bernoulli, formule sommatoire d'Euler-Maclaurin et fonction zêta de Riemann

### Définitions et notations

**1. Dérivées successives, classe d'une fonction**

Soient $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur $I$ ; soit $n$ un entier naturel non nul.

✓ On dit que la fonction $f$ est *une fois dérivable* sur $I$ si elle est dérivable sur $I$ ; dans ce cas, on pose $f^{(1)} = f'$, où $f'$ est la fonction dérivée de $f$ ; $f^{(1)}$ est appelée *la fonction dérivée d'ordre* 1 de la fonction $f$.

✓ On dit que la fonction $f$ est *deux fois dérivable* sur $I$ si la fonction $f^{(1)}$ est dérivable sur $I$ ; dans ce cas, on pose $f^{(2)} = \left(f^{(1)}\right)'$, où $\left(f^{(1)}\right)'$ est la fonction dérivée de $f^{(1)}$ ; $f^{(2)}$ est appelée *la fonction dérivée d'ordre* 2 de la fonction $f$.

✓ Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que la fonction $f$ est *$n$-fois dérivable* sur $I$ si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable sur $I$ ; dans ce cas, on pose $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$, où $\left(f^{(n-1)}\right)'$ est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$ ; $f^{(n)}$ est appelée *la fonction dérivée d'ordre* $n$ de la fonction $f$.

✓ On dit que $f$ est *de classe* $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, sur $I$ si elle est $p-$fois dérivable sur $I$ et $f^{(p)}$, sa dérivée d'ordre $p$, est de plus continue sur $I$. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$ et on dit que $f$ est *de classe* $\mathcal{C}^0$ sur $I$ si elle est continue sur $I$.

✓ On dit que $f$ est *indéfiniment dérivable* (ou *de classe* $\mathcal{C}^\infty$) sur $I$ si elle est $p-$fois dérivable sur $I$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

**2. Rappels et compléments sur les fonctions polynomiales**

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ et à coefficients réels ; pour tout entier naturel $n$, on note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des fonctions polynomiales appartenant à $\mathscr{P}$ et dont le degré est inférieur ou égal à $n$.

On rappelle et on admet ce qui suit :

✓ toute fonction polynomiale appartenant à $\mathscr{P}$ est $n$-fois dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel non nul $n$ ;

✓ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathscr{P}_n$, $P^{(k)} = 0$ pour tout entier naturel $k \geqslant n+1$ ;

✓ pour tous $P, Q$ de $\mathscr{P}$, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$, où $\deg(R)$ désigne le degré de la fonction polynomiale $R \in \mathscr{P}$ ;

✓ si $n \in \mathbb{N}$ et si deux fonctions polynomiales $P$ et $Q$ de $\mathscr{P}_n$ coïncident en au moins $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{R}$, alors $P = Q$ ;

✓ toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ;

✓ Formule de Taylor pour les fonctions polynomiales : si $P \in \mathscr{P}$ est une fonction polynomiale de degré $n$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a la formule dite de TAYLOR[1] suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

**3. Continuité uniforme**

Définition : Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f$ est *uniformément continue* sur $I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Vous pouvez utiliser librement le résultat suivant appelé *théorème de* HEINE[2] :

Théorème de Heine : Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **continue** sur le segment $[a,b]$, avec $a < b$, alors $f$ est **uniformément continue** sur $[a,b]$.

**4. Coefficients binomiaux généralisés**

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}^*$, on note $\binom{x}{r} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}$ et $\binom{x}{0} = 1$ ; ainsi, pour tout $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{r}{s} = \dfrac{r!}{s!(r-s)!}$ si $r \geqslant s$ et $\binom{r}{s} = 0$ sinon.

**5. Partie entière d'un réel**

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x$ ; $\lfloor x \rfloor$ est donc l'unique entier relatif $k$ vérifiant $k \leqslant x < k+1$.

## 1ère Partie
## Premières propriétés des nombres et polynômes de BERNOULLI[3]

On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}$ définis sur $\mathbb{R}$ par le système suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_0(x) = 1, \quad B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n := B_n(0)$ ; $b_n$ s'appelle le *$n-$ième nombre de* BERNOULLI.

**1.1.** Justifier que le système ci-dessus définit bien une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{P}$.

**1.2.** Calculer explicitement les polynômes $B_1$, $B_2$, $B_3$ et $B_4$ ; en déduire les valeurs des nombres $b_1$, $b_2$, $b_3$ et $b_4$.

**1.3. Degré et coefficients de $B_n$**

**1.3.1.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n$ est à coefficients rationnels.

**1.3.2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de $B_n$ ainsi que son coefficient dominant.

**1.4.** Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. Montrer que $B_n(1) = b_n$.

**1.5. Une relation de symétrie**

**1.5.1.** Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

**1.5.2.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$.

**1.6. Une formule d'addition et application**

**1.6.1.** Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, $B_n^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}(x)$.

**1.6.2.** Montrer que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, $B_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(x)\,y^k$.

**1.6.3.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$.

**1.6.4.** Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$,

$$|B_n(x) - b_n| \leqslant (|x|+1)^n \max_{k\in\{0,\ldots,n-1\}} |b_k|.$$

---

1. TAYLOR, math. anglais (1685-1731)
2. HEINE, math. allemand (1821-1881)
3. JACQUES BERNOULLI, math., medecin et phy. suisse (1654-1705)

### 1.7. Formule de FAULHABER [4]

**1.7.1.** Montrer que, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

**1.7.2.** Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

(i) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\Big(B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}\Big)$.

(ii) En déduire la formule de Faulhaber suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p+1}{k} b_k\, n^{p+1-k}$.

(iii) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5$ en fonction de $n$.

## 2ème Partie

## Étude des racines des polynômes $B_n$ dans le segment $[0,1]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ Théorème de VON STAUDT [5]– CLAUSEN [6] et une application

### 2.1. Racines du polynôme $B_n$ dans le segment $[0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**2.1.1.** Montrer que $0$, $\frac{1}{2}$ et $1$ sont des racines de $B_{2n+1}$.

**2.1.2.** L'objectif de cette section est de montrer que $B_{2n+1}$ admet exactement trois racines distinctes dans $[0,1]$. Raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe $\alpha \in [0,1] \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ tel que $B_{2n+1}(\alpha) = 0$.

(i) Si $\alpha < \frac{1}{2}$, montrer qu'il existe $\beta, \gamma \in [0,1]$, avec $0 < \beta < \alpha < \gamma < \frac{1}{2}$, tels que $B_{2n}(\beta) = B_{2n}(\gamma) = 0$.

(ii) Si $\alpha > \frac{1}{2}$, montrer qu'il existe $\beta, \gamma \in [0,1]$, avec $0 < \beta < 1-\alpha < \gamma < \frac{1}{2}$, tels que $B_{2n}(\beta) = B_{2n}(\gamma) = 0$.

(iii) Conclure.

**2.1.3.** Montrer que $B_{2n}$ admet exactement deux racines dans le segment $[0,1]$.

**La suite de cette partie vise à montrer le théorème de Von Staudt-Clausen et à établir le résultat suivant : « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{2n}$ n'admet pas de racine entière. »**

**2.2.** Montrer, pour tout triplet $(k,r,s) \in \mathbb{N}^3$, la formule $\binom{k}{r}\binom{r}{s} = \binom{k}{s}\binom{k-s}{r-s}$.

**2.3.** Soit $p$ un entier naturel ; pour tout $r \in \mathbb{N}$, on pose $a_{p,r} = \displaystyle\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}s^p$.

**2.3.1.** Montrer que pour tout $k \in \{0,\dots,p\}$, $k^p = \displaystyle\sum_{r=0}^{p} a_{p,r}\binom{k}{r}$.

**2.3.2.** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^p = \displaystyle\sum_{r=0}^{p} a_{p,r}\binom{x}{r}$. *On remarquera que pour tout $q \in \mathbb{N}$, l'expression $\binom{x}{q}$ est polynomiale en $x$.*

**2.3.3.** Montrer que pour tout $r \in \{0,\dots,p\}$, $\frac{a_{p,r}}{r!} \in \mathbb{Z}$.

**2.4.** Soit $p \in \mathbb{N}$ ; on considère l'équation fonctionnelle $(\mathcal{E}_p)$, d'inconnue $f \in \mathscr{P}$, suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) - f(x) = x^p. \tag{$\mathcal{E}_p$}$$

Montrer que les solutions dans $\mathscr{P}$ de l'équation fonctionnelle $(\mathcal{E}_p)$ sont exactement les fonctions

$$f_\alpha : x \longmapsto f_\alpha(x) = \alpha + \sum_{r=0}^{p} a_{p,r}\binom{x}{r+1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

4. FAULHABER, math. allemand (1580-1635)
5. STAUDT, math. allemand (1798-1867)
6. CLAUSEN, math. danois (1801-1885)

**2.5.** Soit $(p,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

**2.5.1.** Montrer que $B_{p+1}(x) = b_{p+1} + (p+1)\sum_{r=0}^{p} a_{p,r}\binom{x}{r+1}$.

**2.5.2.** En déduire que $b_p = \sum_{r=0}^{p} \frac{1}{r+1}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}s^p$.

**2.6.** Soit $r$ un entier $\geqslant 5$ tel que $r+1$ ne soit pas premier. Montrer que l'entier $r!$ est divisible par $(r+1)$.

**2.7.** Soit $r$ un entier $\geqslant 1$ tel que $r+1$ soit premier.

**2.7.1.** Soit $p \in \mathbb{N}$ ; on suppose que $r$ ne divise pas $p$ et on note $t$ le reste de la division euclidienne de $p$ par $r$.

(i) Montrer que pour tout $x \in \{1,\dots,r\}$, $x^p \equiv x^t\ [r+1]$.

(ii) Montrer que l'équation $x^t \equiv 1\ [r+1]$, d'inconnue $x$, admet au plus $t$ solutions dans $\{0,\dots,r\}$.

(iii) En déduire qu'il existe $a \in \{1,\dots,r\}$ tel que $a^p \not\equiv 1\ [r+1]$.

(iv) Montrer que $\sum_{s=0}^{r} s^p \equiv \sum_{s=0}^{r}(as)^p\ [r+1]$.

(v) En déduire que $\sum_{s=0}^{r} s^p \equiv 0\ [r+1]$.

**2.7.2.** Montrer que pour tout $s \in \{0,\dots,r\}$, $(-1)^s\binom{r}{s} \equiv 1\ [r+1]$.

**2.7.3.** En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}s^p \equiv \sum_{s=0}^{r} s^p \equiv \begin{cases} r\ [r+1] & \text{si } r \mid p, \\ 0\ [r+1] & \text{si } r \nmid p. \end{cases}$$

**2.8.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Q_n$ l'ensemble des nombres premiers $p$ tels que $(p-1) \mid 2n$. Montrer le théorème de Von Staudt-Clausen suivant :

$$b_{2n} + \sum_{p \in Q_n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}.$$

**2.9. Application : Le polynôme $B_{2n}$ n'a pas de racines entières**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $B_{2n}(a) = 0$.

**2.9.1.** Montrer que $b_{2n} \notin \mathbb{Z}$ et que $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$.

**2.9.2.** On suppose que $a \geqslant 2$. Montrer que $b_{2n} = -2n\sum_{k=1}^{a-1} k^{2n-1}$ et conclure.

**2.9.3.** On suppose que $a \leqslant -1$. Montrer que $B_{2n}(1-a) = 0$ et conclure.

## 3ème Partie
## Formule sommatoire d'Euler[7] – Maclaurin[8]

**3.1. Fonctions de Bernoulli périodisées**

Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on définit la fonction réelle de la variable réelle $\widetilde{B_n} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longrightarrow B_n(x - \lfloor x \rfloor)$.

**3.1.1.** Montrer que la fonction $\widetilde{B_n}$ est 1–périodique sur $\mathbb{R}$.

**3.1.2.** On suppose ici que $n \geqslant 2$.

(i) Montrer que la fonction $\widetilde{B_n}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Que dire de la fonction $\widetilde{B_1}$ ?

(ii) Montrer que la fonction $\widetilde{B_n}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-2}$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $k \in \{0,\dots,n-2\}$, $\widetilde{B_n}^{(k)}(1) = \widetilde{B_n}^{(k)}(0)$.

7. Euler, math. et phy. suisse (1707-1783)
8. Maclaurin, math. écossais (1688-1746)

### 3.2. Une formule préliminaire

Soit $f$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$. On pose

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1 \widetilde{B_n}(x)f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x, \quad n\in\mathbb{N}.$$

**3.2.1.** Calculer $R_0$ et $R_1$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

**3.2.2.** Pour $n\geqslant 2$, démontrer que $R_n = \dfrac{-b_n}{n!}\Big(f^{(n-1)}(1)-f^{(n-1)}(0)\Big)+R_{n-1}$.

**3.2.3.** En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$f(1)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{p=1}^{n}\frac{b_p}{p!}\Big(f^{(p-1)}(1)-f^{(p-1)}(0)\Big)+R_n.$$

### 3.3. Formule sommatoire d'Euler–Maclaurin

**3.3.1.** Soit $(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$f(k+1)=\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{p=1}^{n}\frac{b_p}{p!}\Big(f^{(p-1)}(k+1)-f^{(p-1)}(k)\Big)+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_k^{k+1}\widetilde{B_n}(x)f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

*On pourra appliquer la formule de la question* **3.2.3.** *précédente à la fonction* $x\longmapsto f(k+x)$.

**3.3.2.** Soit $r\in\mathbb{N}^*$. Établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{r}f(k)=\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{p=1}^{n}\frac{b_p}{p!}\Big(f^{(p-1)}(r)-f^{(p-1)}(0)\Big)+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^r\widetilde{B_n}(x)f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 4ème Partie
## Étude de la suite $(S_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$

Soit $\alpha>1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n(\alpha)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$.

### 4.1. Convergence de la suite $(S_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$

**4.1.1.** Vérifier que la suite $(S_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ est croissante.

**4.1.2.** Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}$.

**4.1.3.** En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(\alpha)\leqslant\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

**4.1.4.** Conclure que la suite $(S_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$ converge.

*Dans la suite, on notera* $\zeta(\alpha)$ *sa limite. Ainsi,* $\zeta(\alpha)=\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$, *où* $\zeta$ *est la fonction de Riemann définie par :*

$$\zeta:\,]1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\ s\longmapsto\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

### 4.2. Encadrement du reste

**4.2.1.** Soient $p,q\in\mathbb{N}^*$, avec $p\geqslant q$. Montrer que $0\leqslant S_p(\alpha)-S_q(\alpha)\leqslant\dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{q^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{p^{\alpha-1}}\right)$.

**4.2.2.** En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant\zeta(\alpha)-S_n(\alpha)\leqslant\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

### 4.3. Équivalent de $\zeta(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers 1 par valeur supérieure

**4.3.1.** Monter que pour tout $\alpha>1$, $\dfrac{1}{\alpha-1}\leqslant\zeta(\alpha)\leqslant\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

**4.3.2.** Conclure quant à l'existence et la valeur de la limite $\lim\limits_{\alpha\to1^+}(\alpha-1)\zeta(\alpha)$.

## 5ème Partie

## Calcul explicite des nombres $\zeta(2k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, à l'aide des nombres de Bernoulli

**5.1.** Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times ]0, \pi[$. Montrer que $1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\theta) = \dfrac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

**5.2. Calcul des intégrales $I_{n,k}$, pour $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$**

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$.

**5.2.1.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 2$, établir la formule de récurrence $I_{n,k} = -\dfrac{n(2n-1)}{2k^2\pi^2} I_{n-1,k}$.

**5.2.2.** Calculer l'intégrale $I_{1,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

**5.2.3.** En déduire que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, $I_{n,k} = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2k\pi)^{2n}}$.

**5.3. Étude de la fonction auxiliaire $\Phi_n$**

Soit $n$ un entier $\geqslant 3$. On considère la fonction $\Phi_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi_n(0) = \frac{n\,b_{n-1}}{\pi}, \quad \Phi_n(1) = -\Phi_n(0) \quad \text{et} \quad \Phi_n(t) = \frac{B_n(t) - b_n}{\sin(\pi t)} \quad \text{si } t \in ]0,1[.$$

Montrer soigneusement que la fonction $\Phi_n$ est continue sur $[0,1]$.

**5.4. Un lemme de type Riemann–Lebesgue**

Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$.

**5.4.1.** Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{1+\frac{\pi}{\lambda}} f\Big(s - \frac{\pi}{\lambda}\Big)\sin(\lambda s)\,\mathrm{d}s$.

**5.4.2.** Montrer que pour tout $\lambda > \pi$,

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi}{\lambda}\max_{x\in[0,1]}|f(x)| + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^1 \left|f(t) - f\Big(t - \frac{\pi}{\lambda}\Big)\right|\mathrm{d}t.$$

**5.4.3.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geqslant \pi/\eta$, on ait :

$$\forall t \in \Big[\tfrac{\pi}{\lambda}, 1\Big], \quad |f(t) - f(t - \tfrac{\pi}{\lambda})| \leqslant \varepsilon.$$

**5.4.4.** En déduire que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$.

**5.5. Application au calcul de $\zeta(2n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$**

**5.5.1.** Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\Phi_{2n}(t)\sin\big((2p+1)\pi t\big) = \big(B_{2n}(t) - b_{2n}\big)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{p}\cos(2k\pi t)\right).$$

**5.5.2.** En déduire que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \Phi_{2n}(t)\sin\big((2p+1)\pi t\big)\,\mathrm{d}t = -b_{2n} + 2\sum_{k=1}^{p} I_{n,k}$.

**5.5.3.** Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2n) = \dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\,b_{2n}$. Que vaut $\zeta(2)$ ? Et $\zeta(4)$ ?

## 6ème Partie

## Étude de la suite $(|b_{2n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ et une application probabiliste

**6.1. Étude de la suite $(|b_{2n}|)_{n\in\mathbb{N}}$**

**6.1.1.** Montrer que pour tout $t > 1$, $\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t \leqslant e \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{t-1}\right)^t$.

**6.1.2.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \leqslant (2n)! \leqslant e^2\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n+1}$.

**6.1.3.** Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2e\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n} \leqslant |b_{2n}| \leqslant 8\pi e^2\left(\frac{n}{e\pi}\right)^{2n+1}$, et conclure quant à la nature de la suite $\left(|b_{2n}|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**6.1.4.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[2n]{|b_{2n}|}}{n} = \frac{1}{\pi e}$.

**6.2. Une application probabiliste**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la variable aléatoire $X_n$ définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P)$ et vérifiant $X_n(\Omega) = \left\{|b_{2k}| \; ; \; k \in \{0,\dots,n\}\right\}$ et

$$\forall k \in \{0,\dots,n\}, \quad P(X_n = |b_{2k}|) = \frac{1}{n+1}.$$

**6.2.1.** Déterminer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire $X_n$ .

**6.2.2.** Préciser le comportement de la suite $\left(E(X_k)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

**6.2.3.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n \leqslant n) \leqslant \frac{b(n)}{n+1}$, où

$$b : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \operatorname{card}\left\{n \in \mathbb{N} \; ; \; |b_{2n}| \leqslant x\right\}.$$

**6.2.4.** Soient $\alpha, \beta, \delta \in ]0,+\infty[$ ; on considère la fonction $h_{\alpha,\beta,\delta} : \left]\frac{\alpha}{e},+\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (\beta x + \delta)\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Montrer que $h_{\alpha,\beta,\delta}$ réalise une bijection de $\left]\frac{\alpha}{e},+\infty\right[$ sur un intervalle $J$ à préciser.

*Dans la suite, on notera $\psi_{\alpha,\beta,\delta}$ la fonction réciproque de $h_{\alpha,\beta,\delta}$.*

**6.2.5.** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)\,\psi_{\alpha,\beta,\delta}(x)}{x} = \frac{1}{\beta}$.

**6.2.6.** Montrer que pour $x$ assez grand,

$$\left\lfloor \psi_{\pi e,2,1}\left(\ln\tfrac{x}{8\pi e^2}\right)\right\rfloor \leqslant b(x) \leqslant 1 + \left\lfloor \psi_{\pi e,2,0}\left(\ln\tfrac{x}{2e}\right)\right\rfloor.$$

**6.2.7.** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))\,b(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{2}$.

**6.2.8.** Conclure que pour tout $s > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\ln(\ln(n))\,P(X_n \leqslant n)}{(\ln(n))^s} = 0$.

## 7ème Partie
## Une application de la formule sommatoire d'Euler–Maclaurin à l'approximation de $\zeta(\alpha)$, pour $\alpha > 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\psi_r(x) = x(x+1)\cdots(x+r-1)$ si $r \in \mathbb{N}^*$ et $\psi_0(x) = 1$. On considère $\alpha > 1$ et on désigne par $\gamma$ la fonction

$$\gamma : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{(1+x)^\alpha}.$$

**7.1.** Montrer que $\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}\times[0,+\infty[$, $\gamma^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\psi_n(\alpha)}{(1+x)^{\alpha+n}}$.

**7.2.** En appliquant la formule sommatoire d'Euler–Maclaurin à la fonction $\gamma$, prouver que pour tous $r, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(1+n)^{\alpha-1}}\right) + \sum_{p=1}^{r}\frac{(-1)^p\psi_{p-1}(\alpha)}{p!}b_p\left(1 - \frac{1}{(1+n)^{\alpha+p-1}}\right) - x_n,$$

où $x_n = \frac{\psi_r(\alpha)}{r!}\int_0^n \frac{\widetilde{B_r}(x)}{(1+x)^{\alpha+r}}\,\mathrm{d}x$.

**7.3. Un résultat utile**

Soit $g$ une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ telle qu'il existe $M>0$ tel que $0 \leqslant g(t) \leqslant M$ pour tout $t \geqslant 0$. On pose $\gamma_n = \displaystyle\int_0^n \frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha+r}}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dfrac{M}{\alpha+r-1}$. Conclure.

**7.4.** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *Dans la suite, on notera $\lambda_\alpha$ sa limite.*

**7.5. Résultat d'approximation de $\zeta(\alpha)$**

**7.5.1.** Montrer que pour tous $\alpha>1$ et $r \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} + \displaystyle\sum_{p=1}^{r} \frac{(-1)^p \psi_{p-1}(\alpha)}{p!} b_p - \lambda_\alpha$.

**7.5.2.** Montrer que pour tous $\alpha>1$ et $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\zeta(\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha-1} - \sum_{p=1}^{r} \frac{(-1)^p \psi_{p-1}(\alpha)}{p!} b_p\right| \leqslant \frac{\psi_r(\alpha) \max\limits_{t\in[0,1]} |B_r(t)|}{r!(\alpha+r-1)}.$$

**7.5.3.** Retrouver ainsi la valeur de la limite $\lim\limits_{\alpha\to 1^+} (\alpha-1)\zeta(\alpha)$.

FIN DU SUJET