



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

---

### **MATHÉMATIQUES**

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### **RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

# EXERCICE 1

## Questions préliminaires

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Vérifier que  $\varphi : t \mapsto t^n$  est une fonction convexe sur  $]0, 1[$ .
2. Écrire l'inégalité de convexité de *Jensen* pour cette fonction.
3. Soient  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note  $I_p$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .
  - 3.1. Déterminer un polynôme annulateur de  $J$  de degré 2.
  - 3.2. En déduire les valeurs propres possibles de  $I_p + J$ .
  - 3.3. Justifier alors que la matrice  $I_p + J$  appartient à  $\mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire que  $I_p + J$  est une matrice symétrique réelle définie positive.

\*\*\*\*\*

Soient  $n$  et  $r$  deux entiers naturels avec  $n \geq 2$  et  $r \geq 3$ .

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à  $r$  résultats différents  $(\alpha_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  de probabilités respectives  $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  avec :  $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, x_j \in ]0, 1[$ .

On effectue  $n$  épreuves indépendantes du type de celle décrite au-dessus, ce qui définit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on note  $X_j$  la variable aléatoire telle que  $X_j(\Omega) = \{0, 1\}$ , et pour tout  $\omega \in \Omega$  :

- $X_j(\omega) = 0$  si  $\alpha_j$  est obtenu au moins une fois à l'issue de ces  $n$  épreuves,
- $X_j(\omega) = 1$  sinon, c'est-à-dire si  $\alpha_j$  n'est jamais obtenu.

Enfin, on désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des  $n$  épreuves.

### 4. Une expression de l'espérance de $X$

4.1. Soit  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Déterminer la loi de  $X_j$ .

4.2. Exprimer la variable aléatoire  $X$  à l'aide des variables  $(X_j)_{j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ .

4.3. Démontrer alors que l'espérance de la variable aléatoire  $X$  est :  $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$ .

### 5. La suite de l'exercice consiste à rechercher les valeurs des réels $x_j$ pour lesquelles l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est minimale.

Cela revient à dire que l'on cherche un minimum pour la fonction  $f : (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mapsto \sum_{j=1}^r (1 - x_j)^n$  sous la contrainte :

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, x_k > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^r x_j = 1.$$

On pose  $U = \left\{ (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}, \forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, x_k > 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{r-1} x_j < 1 \right\}$ .

5.1. Représenter graphiquement  $U$  dans le plan, c'est-à-dire dans le cas où  $r = 3$ .

5.2. Justifier que  $U$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{r-1}$ .

5.3. Déterminer une fonction  $h$ , définie sur  $U$ , des  $r - 1$  variables  $(x_j)_{j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket}$ , telle que :

$$h(x_1, \dots, x_{r-1}) = \mathbb{E}(X).$$

5.4. Prouver que  $h$  est de classe  $C^2$  sur  $U$ .

$$(h_1, \dots, h_{r-1})(x_1, \dots, x_{r-1}) = \sum_{n=1}^n x_1 \cdots x_{r-1} =$$

5.5. Recherche des points critiques de  $h$

5.5.1. Soient  $j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$  et  $m = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in U$ .

Déterminer la  $j$ -ième coordonnée du vecteur gradient de la fonction  $h$  en  $m$  :

5.5.2. Déterminer l'unique point critique  $b$  de  $h$  sur  $U$ .

5.6. Conclusion

5.6.1. Écrire la matrice Hessienne de  $h$  en  $b$ .

5.6.2. Démontrer alors que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ admet un minimum local pour } x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}.$$

*On pourra utiliser une question préliminaire.*

5.6.3. En utilisant la convexité de la fonction  $\varphi$  définie dans la question préliminaire, démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) \text{ est minimale si, et seulement si, } x_1 = \dots = x_r = \frac{1}{r}.$$

## EXERCICE 2

### Question de cours

1. Rappeler, sans démonstration, les valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  pour lesquelles la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  converge.

Lorsqu'il y a convergence, on note  $\zeta(x)$  sa somme.

2. Rappeler, sans démonstration, la somme et l'intervalle de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} r^n$ .

\* \* \* \* \*

On rappelle que si  $f$  est une fonction infiniment dérivable sur une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$ , alors, pour tout entier naturel  $p$ ,  $f^{(p)}$  désigne la dérivée d'ordre  $p$  de la fonction  $f$  avec la convention  $f^{(0)} = f$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on note, lorsque cela existe :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) \text{ et, pour } k \geq 2, E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$$

3. Justifier l'existence de  $E_1(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

4. Soient  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Étudier la nature des séries  $\sum_{n \neq 1} \frac{1}{(x-n)^k}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^k}$ .

4.2. En déduire l'existence de  $E_k(x)$  pour tout  $k \geq 2$ .

5. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

5.1. Démontrer que la fonction  $E_k$  est 1-périodique.

5.2. Étudier la parité de la fonction  $E_k$ .

6. Une relation de récurrence

6.1. Prouver que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $E_k$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, E'_k(x) = -k E_{k+1}(x).$$

6.2. En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $E_k$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et que :

$$E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}.$$

7. Montrer que pour tout  $x$  de  $] -1, 1[$  et pour tout entier naturel non nul  $n$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{n^{k+1}}$  converge et calculer sa somme.

8. Établir que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

9. Montrer que pour tout  $x$  non nul de  $] -1, 1[$ , on a :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - 2 \sum_{s=1}^{+\infty} \zeta(2s) x^{2s-1}.$$

*Le théorème utilisé sera cité avec précision en vérifiant ses hypothèses avec soin.*

10. En déduire que  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ] -1, 1[, x \neq 0$ ,

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + 2(-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} \binom{2s-1}{k-1} \zeta(2s) x^{2s-k},$$

avec la convention  $\binom{m}{p} = 0$  si  $p > m$ .

### EXERCICE 3

Dans cet exercice, le corps  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3. À tout  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{n-1}$ , c'est-à-dire que  $a_1 \neq 0$ , on associe la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

**1. Dans cette question  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

**1.1.** Justifier que  $M$  est diagonalisable.

**1.2.** Déterminer le rang de la matrice  $M$ .

**1.3.** Justifier que 0 est valeur propre et donner son ordre de multiplicité.

**1.4.** Démontrer alors que la matrice  $M$  possède deux valeurs propres non nulles (éventuellement égales) que l'on notera  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

**1.5.** Déterminer une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

**1.6.** Soit  $\lambda$  un réel non nul.

En résolvant le système  $MX = \lambda X$  où  $X$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$ , montrer que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0.$$

**1.7.** Déterminer une base des sous-espaces propres de  $M$  associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

**1.8.** Expliciter une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}MP$  est diagonale.

*On précisera la matrice diagonale obtenue.*

**2. Étude du cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**

**2.1.** Montrer que :

$$M \text{ n'est pas diagonalisable si, et seulement si, } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \\ \text{ou} \\ a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0 \end{cases}$$

**2.2.** Donner un exemple de matrice  $M$  non diagonalisable dans le cas où  $n = 3$ .

**FIN**