EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Questions préliminaires

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
Écrire pour la fonction f, sans la redémontrer, la formule de *Taylor-Young* à l'ordre 2 en un point a de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1 et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.1. Déterminer le rang de J.

2.2. Justifier que 0 est valeur propre de J. Quel est son ordre de multiplicité ?

2.3. Démontrer alors que la matrice $I_n + J$ est symétrique réelle définie positive.

* * * * *

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall\, m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(m) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

c'est-à-dire :

$$f(m) = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right) + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

4. Soit $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4.1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(m)$.

4.2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(m)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(m)$.

4.3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(m)$.

5. Déterminer le vecteur gradient $\nabla f(m)$ de f au point $m = (x_1, \dots, x_n)$.

6. Déterminer le seul point critique $a = (a_1, \dots, a_n)$ de f dans $\mathbb{R}^n$.

7. Soit $m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

7.1. Déterminer la matrice Hessienne $H_f(m)$ de f.

7.2. Déterminer le spectre de $H_f(m)$.

8. Montrer que f admet un extremum local en a et préciser sa nature et sa valeur.

EXERCICE 2

On définit, lorsque cela est possible, la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} v_0 \in [-1,1] \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2} v_n\right) \end{cases}$$

1. Étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.1. Dresser le tableau de variations sur $[-1,1]$ de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)$.

En particulier, on déterminera les deux réels a et b tels que $f([-1,1]) = [a,b]$.

1.2. Justifier que $[a,b] \subset]-1,1[$.

1.3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est bien défini et que $v_n \in [a,b]$.

1.4. Démontrer qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leqslant k$.

1.5. Prouver alors que pour tout entier $n \geqslant 2$, $|v_n| \leqslant k \times |v_{n-1}|$.

1.6. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2. Étude d'une série de fonctions

On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[-1,1]$ par :

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2} u_n(x)\right) \end{cases}$$

Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$.

EXERCICE 3

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.
Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k(X) = X^k$ et on rappelle que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E_n.

On note Φ l'application qui à tout polynôme P de E_n associe :

$$\Phi(P) = ((X^2-1)P)'' = (X^2-1)P'' + 4XP' + 2P.$$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E_n.
2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer $\Phi(P_k)$.
3. Déterminer la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B}$.
   On explicitera soigneusement les trois premières colonnes et, en fonction de j, une j-ième colonne de la matrice M, avec $j \in [\![3, n+1]\!]$.

4. Montrer que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes notées : $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.
5. L'endomorphisme Φ de E_n est-il un automorphisme de E_n ?
6. Vérifier que Φ est diagonalisable et déterminer la dimension de ses sous-espaces propres.
7. Soient $k \in [\![0,n]\!]$ et T un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.
   7.1. Montrer que le degré de T est égal à k.
   7.2. Montrer que le polynôme Q défini par : $Q(X) = T(-X)$ est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.
8. Montrer qu'il existe une unique base $\mathscr{U} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ de E_n constituée de vecteurs propres de Φ, telle que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, Q_k est un polynôme unitaire de degré k et vérifie :

$$Q_k(-X) = (-1)^k Q_k(X).$$

9. Que peut-on en déduire sur la parité des polynômes Q_k ?
10. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Justifier que $(Q_0, Q_1, \dots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.
11. Calculer Q_k pour $k \in [\![0,3]\!]$.
12. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,P(t)\,Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur E_n.
13. On munit alors E_n de ce produit scalaire.
    13.1. Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $(E_n, (\,|\,))$.
    On pourra intégrer par parties.
    13.2. Montrer que la base $\mathscr{U}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(\,|\,)$.
    On pourra calculer pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $i \neq j$, le produit scalaire $(\Phi(Q_i)|Q_j)$.
14. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Montrer que : $\forall S \in \mathbb{R}_{j-1}[X],\ \ (S|Q_j) = 0$.

EXERCICE 4

Dans tout l'exercice, on confondra un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

Questions préliminaires

1. Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle.
2. Déterminer les racines complexes du polynôme $X^{11} - 1$.
3. En déduire les racines complexes du polynôme $1 + X + X^2 + \cdots + X^{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} X^k$. Justifier qu'aucune n'est réelle.

*****

Soient U et V les variables aléatoires de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ correspondant chacune au lancer d'un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, pas forcément équilibré, les lancers étant indépendants. On suppose que chaque face de chaque dé possède une probabilité non nulle d'apparition. Enfin, on note $S = U + V$.

4. Déterminer les valeurs prises par les variables aléatoires U, V et S.

On suppose que S suit une loi uniforme.

5. Démontrer que la fonction génératrice G_S de S est une fonction polynomiale que l'on déterminera.

6. Déterminer les racines de G_S dans $\mathbb{C}$.

7. Soient G_U et G_V les fonctions génératrices des variables aléatoires U et V.
Déterminer un polynôme Q (respectivement R) dont les coefficients dépendent de la loi de la variable aléatoire U (respectivement de la variable aléatoire V), vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_U(t) = t\,Q(t) \ \text{ et } \ G_V(t) = t\,R(t).$$

8. Démontrer que les polynômes Q et R possèdent chacun au moins une racine réelle.
On pourra utiliser une des questions préliminaires.

9. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ G_S(t) = t^2\, Q(t)\, R(t)$.

10. Établir une contradiction qui démontre que la supposition encadrée est fausse.
On pourra utiliser une des questions préliminaires.

11. Est-il possible de truquer deux dés à six faces de façon à ce que la somme des résultats obtenus au cours de lancers suive une loi uniforme ?

FIN