Corrigé de l'épreuve II

Intégrale de Wallis généralisée et fonction Gamma d'Euler

■ Partie I : étude de la fonction *W*

1°) *Premières propriétés de la fonction W*

a) Pour tout réel positif x, la fonction $t \longrightarrow \sin^x(t)$ est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et son intégrale $W(x)$ est donc bien définie dans ce cas.

b) Si x est strictement négatif, la fonction $t \longrightarrow \sin^x(t)$ n'est continue que sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
Et au voisinage de 0, on a $\sin^x(t) \sim t^x$.
Comme la fonction $t \longrightarrow t^x = 1/t^{-x}$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ si et seulement si $-x < 1$, on en déduit que $W(x)$ existe pour x négatif si et seulement si $x > -1$.

c) La fonction W est clairement décroissante puisqu'on a $\sin^x(t) \geq \sin^y(t)$ si $x \leq y$.
Par intégration de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on en déduit que $W(x) \geq W(y)$ si $x \leq y$.

d) Exploitons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre :

- la fonction $x \longrightarrow \sin^x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout t fixé dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- la fonction $t \longrightarrow \sin^x(t)$ est dominée indépendamment de $x \geq 0$ par la fonction constante égale à 1, qui est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que la fonction W est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2°) *Première équation fonctionnelle de la fonction W et applications*

a) Une intégration par parties montre que :

$$W(x+2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x+2}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\cos(t)\sin^{x+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme le crochet est nul, on a en remplaçant $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$:

$$W(x+2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x+2}(t)\,\mathrm{d}t = (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t - (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x+2}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui donne finalement :

$$\forall\, x > -1, \quad (x+2)\,W(x+2) = (x+1)\,W(x).$$

b) Cette égalité montre que $W(x) = \frac{x+2}{x+1}\,W(x+2)$.
Comme W est continue sur $\mathbb{R}_+$, le second membre est clairement continu sur]-1, +∞[.
Ainsi, le premier membre l'est aussi et W est continue sur]-1, +∞[.

c) Par continuité de W en 1, la même égalité montre qu'on a au voisinage de -1 :

$$W(x) = \frac{x+2}{x+1}\, W(x+2) \sim \frac{W(1)}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit au passage que $\lim_{x \to -1} W(x) = +\infty$.

3°) *Deuxième équation fonctionnelle de la fonction W et applications*

a) En multipliant par $W(x+1)$ la relation $(x+2)\, W(x+2) = (x+1)\, W(x)$, on obtient :

$$\forall\, x > -1, \quad \varphi(x+1) = (x+2)\, W(x+2)\, W(x+1) = (x+1)\, W(x+1)\, W(x) = \varphi(x).$$

En particulier, la suite $n \longrightarrow \varphi(n)$ est constante, égale à $\varphi(0) = W(1)\, W(0) = \frac{\pi}{2}$.

b) Par décroissance de la fonction W, on a pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 < x \leq 1$:

$$W(n+2)\, W(n+1) \leq W(n+x+1)\, W(n+x) \leq W(n+1)\, W(n).$$

On en déduit par définition de la fonction φ :

$$\frac{\varphi(n+1)}{n+2} \leq \frac{\varphi(n+x)}{n+1+x} \leq \frac{\varphi(n)}{n+1}.$$

La 1-périodicité de φ sur $]-1, +\infty[$ donne $\varphi(n+x) = \varphi(x)$, et avec $\varphi(n) = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\frac{n+1+x}{n+2}\,\frac{\pi}{2} \leq \varphi(x) \leq \frac{n+1+x}{n+1}\,\frac{\pi}{2}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout réel x appartement à $]0, 1]$.

La 1-périodicité de φ sur $]-1, +\infty[$ montre alors que φ est constante, égale à $\frac{\pi}{2}$ sur $]-1, +\infty[$.

c) La décroissance de W et l'égalité $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ impliquent :

$$(x+1)\, W^2(x+1) \leq \varphi(x) = (x+1)\, W(x+1)\, W(x) = \frac{\pi}{2} \leq (x+1)\, W^2(x).$$

Quitte à transformer cette double inégalité, on obtient :

$$\frac{\pi}{2\,(x+1)} \leq W^2(x) \leq \frac{\pi}{2\,x}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, on en déduit par positivité de W que :

$$W(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,x}}\,.$$

4°) *Application au calcul de l'intégrale de Gauss*

a) Pour $x \geq \sqrt{n}$, il est clair que $f_n(x) = 0 \leq e^{-x^2}$.

Et pour $0 \leq x < \sqrt{n}$, on a $\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$ par concavité de la fonction ln.

En multipliant par n et en prenant l'exponentielle, on obtient $f_n(x) \leq e^{-x^2}$.

b) Fixons $x > 0$. Dès que n est assez grand, on a $0 < x < \sqrt{n}$, d'où $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} = e^{-x^2}.$$

Et si $x = 0$, on a $f_n(0) = e^{-0^2}$.

Ainsi donc, la suite (f_n) converge simplement vers $x \longrightarrow e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

c) Exploitons le théorème de convergence dominée :

- la suite de fonctions continues (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $x \longrightarrow e^{-x^2}$.
- la suite (f_n) est dominée indépendamment de n par la fonction $x \longrightarrow e^{-x^2}$, et celle-ci est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue et négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $t \longrightarrow \frac{1}{t^2}$.

On en déduit le résultat voulu :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

d) En posant $x = \sqrt{n}\,\cos(t)$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{n}\, W(2n+1).$$

Avec l'équivalent de W obtenu à la fin de la question 3°, on a $W(2n+1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, W(2n+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

■ Partie II : Relation entre les fonctions *W* et Γ

1°) *Propriétés de la fonction* Γ

a) La fonction $x \longrightarrow e^{-x}\,x^{t-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et on a :

- au voisinage de $+\infty$, $e^{-x}\,x^{t-1} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et la fonction est intégrable.
- au voisinage de 0, $e^{-x}\,x^{t-1} \sim x^{t-1} = \frac{1}{x^{1-t}}$ qui est intégrable si et seulement si $t > 0$.

Finalement, la fonction Γ d'Euler est définie pour $t > 0$.

b) Intégrons par parties la fonction précédente sur $[\varepsilon, A]$:

$$\int_\varepsilon^A e^{-x}\,x^t\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\,x^t\right]_\varepsilon^A + t \int_\varepsilon^A e^{-x}\,x^{t-1}\,\mathrm{d}x.$$

En faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, le crochet a pour limite 0, on a : $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$.

c) Le résultat de la question précédente donne :

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \dots = n!\,\Gamma(1) = n!$$

2°) *Relation entre les fonctions W et* Γ

a) Le théorème de Fubini sur le pavé $\mathcal{P}(R) = [0, R] \times [0, R]$ donne :

$$\iint_{\mathcal{P}(R)} e^{-x^2-y^2}\,y^t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^R e^{-y^2}\,y^t\,\mathrm{d}y.$$

D'après le résultat de I.4, on connaît la limite $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ de la première intégrale.

Dans la seconde intégrale, on pose $y = \sqrt{u}$, ce qui conduit à :

$$\int_0^R e^{-y^2}\, y^t\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{R^2} e^{-u}\, u^{\frac{t-1}{2}}\, \mathrm{d}u.$$

D'après la définition de Γ, la limite de cette intégrale est $\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)$, d'où :

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{\mathcal{P}(R)} e^{-x^2-y^2}\, y^t\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\Gamma\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

b) Un passage en coordonnées polaires donne :

$$\iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2}\, y^t\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,R]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} e^{-r^2}\, r^{t+1}\, \sin^t(\theta)\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Puis le théorème de Fubini sur le pavé $[0, R]\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ conduit à :

$$\iint_{[0,R]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} e^{-r^2}\, r^{t+1}\, \sin^t(\theta)\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^R e^{-r^2}\, r^{t+1}\, \mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^t(\theta)\, \mathrm{d}\theta.$$

En posant comme plus haut $r = \sqrt{u}$ dans la première intégrale, on voit que celle-ci tend vers $\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right)$ quand R tend vers $+\infty$, et il vient en exploitant la relation $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$:

$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2}\, y^t\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right) W(t) = \frac{t}{4}\,\Gamma\left(\frac{t}{2}\right) W(t).$$

c) Comme on intègre une fonction positive, et comme $C(R) \subset \mathcal{P}(R) \subset C\left(R\sqrt{2}\right)$, on a :

$$\iint_{C(R)} e^{-x^2-y^2}\, y^t\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{\mathcal{P}(R)} e^{-x^2-y^2}\, y^t\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{C\left(R\sqrt{2}\right)} e^{-x^2-y^2}\, y^t\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on constate donc que les deux limites obtenues précédemment sont égales, ce qui implique $\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right) = t\,\Gamma\left(\frac{t}{2}\right) W(t)$, ce qui donne pour $t > 0$:

$$W(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{t}\,\frac{\Gamma\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

3°) *Une application à la fonction* Γ

Quitte à changer t en $2\,t$ dans la formule précédente et à exploiter l'équivalent de W obtenu à la question I.3°, on obtient l'équivalence suivante quand t tend vers $+\infty$:

$$W(2\,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,t}\,\frac{\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(t)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4\,t}}$$

On en déduit le résultat voulu : $\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right) \sim \sqrt{t}\,\Gamma(t)$.
