

**ECOLES NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2026**

**VENDREDI 17 AVRIL 2026**

**08h00 - 12h00**

**FILIERES MP et MPI**

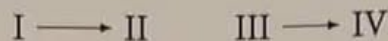
**Epreuve n° 9**

**MATHEMATIQUES C**

***Durée : 4 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve***

Le sujet comporte sept pages, numérotées de 1 à 7, et quatre parties nommées I, II, III et IV. Le diagramme suivant représente les dépendances entre celles-ci.



Il est possible d'utiliser le résultat d'une question même si elle n'a pas été traitée, à condition d'indiquer clairement son numéro. La clarté, la concision et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.



### Notations et rappels

Dans tout le sujet,  $n \geq 1$  est un entier. On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique, et  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée : si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sont deux points de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

On note  $A^T$  la transposée d'une matrice  $A$ . Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est *convexe* si

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x').$$

Pour  $L > 0$ , une fonction  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est *L-lipschitzienne* si

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad \|F(x') - F(x)\| \leq L \|x' - x\|.$$

Un point  $x_* \in \mathbb{R}^n$  est un *point fixe* d'une fonction  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $F(x_*) = x_*$ .



## Partie I. — Inégalités variationnelles et projection sur un convexe fermé

### A. — Inégalités variationnelles

Cette partie introduit les notions de solution faible et forte d'une inégalité variationnelle, ainsi que les opérateurs monotones.

Soit  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction et  $C \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe fermé non-  
vide.

On dit qu'un point  $x_* \in \mathbb{R}^n$  est une *solution forte* de  $G$  sur  $C$  si  $x_* \in C$  et si

$$\forall x \in C, \quad \langle G(x_*), x - x_* \rangle \geq 0.$$

On dit qu'un point  $x_* \in \mathbb{R}^n$  est une *solution faible* de  $G$  sur  $C$  si  $x_* \in C$  et si

$$\forall x \in C, \quad \langle G(x), x - x_* \rangle \geq 0.$$

On dit que  $G$  est un *opérateur monotone* si

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad \langle G(x') - G(x), x' - x \rangle \geq 0.$$

- 1) Montrer que si  $G$  est un opérateur monotone et si  $x_* \in C$  est une solution forte de  $G$  sur  $C$ , alors  $x_*$  est une solution faible de  $G$  sur  $C$ .
- 2) On suppose dans cette question que  $G$  est un opérateur monotone continu et qu'il existe  $x_* \in C$  une solution faible de  $G$  sur  $C$ . Soient  $x \in C$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ .  
On pose  $x_\lambda = x_* + \lambda(x - x_*)$ .
  - a) Montrer que  $\langle G(x_\lambda), x - x_* \rangle \geq 0$ .
  - b) En déduire que  $x_*$  est une solution forte de  $G$  sur  $C$ .
- 3) On suppose dans cette question que  $n = 1$ .
  - a) Soit  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $C \subset \mathbb{R}$  un ensemble convexe compact non-  
vide. Montrer qu'il existe une solution forte de  $G$  sur  $C$ .
  - b) Montrer qu'il existe un ensemble convexe compact non-  
vide  $C \subset \mathbb{R}$  et une fonction  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue tels qu'il n'existe pas de solution faible de  $G$  sur  $C$ .
- 4) a) On suppose dans cette question que  $n = 1$  et que  $G$  est un opérateur monotone. Soit  $C \subset \mathbb{R}$  un ensemble convexe compact non-  
vide. Montrer qu'il existe une solution faible de  $G$  sur  $C$ .

- b) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , il existe un ensemble convexe compact non-vidé  $C \subset \mathbb{R}^n$  et un opérateur monotone  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels qu'il n'existe pas de solution forte de  $G$  sur  $C$ .

## B. — Projection sur un convexe fermé

*Cette partie introduit la notion de projection sur un convexe fermé et établit quelques propriétés.*

Soit  $C \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe fermé non-vidé. On note  $d_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$d_C(y) = \inf_{x \in C} \|x - y\|$$

pour  $y \in \mathbb{R}^n$ .

- 5) Soit  $y \in \mathbb{R}^n$ . Montrer qu'il existe un point  $x \in C$  tel que

$$d_C(y) = \|y - x\|. \quad (\star)$$

On admet que les deux propriétés suivantes sont vraies :

- (i) pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , le point  $x \in C$  vérifiant  $(\star)$  est unique, il est appelé *projeté orthogonal* de  $y$  sur  $C$  et noté  $\Pi_C(y)$ ;
- (ii)  $\Pi_C(y)$  est l'unique point de  $C$  vérifiant

$$\forall x' \in C, \quad \langle x' - \Pi_C(y), y - \Pi_C(y) \rangle \leq 0;$$

- 6) Soient  $y, y' \in \mathbb{R}^n$ . On pose  $x = \Pi_C(y)$  et  $x' = \Pi_C(y')$ . Montrer que

$$0 \leq \|x\|^2 - \|x'\|^2 - 2 \langle y', x - x' \rangle \leq \|y' - y\|^2.$$



## Partie II. — Un cas d'existence de solution et théorème du minimax de von Neumann

*Cette partie démontre l'existence d'une solution forte dans le cas d'un opérateur monotone et continu sur un ensemble convexe, compact et non-vidé et en déduit le théorème du minimax de von Neumann.*

Soient  $C \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble convexe, compact et non-vidé,  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un opérateur monotone continu et  $\eta > 0$ .

On définit deux suites  $(y_j)_{j \geq 1}$  et  $(x_j)_{j \geq 1}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  en posant  $y_1 = 0$ ,  $x_1 = \Pi_C(y_1)$ , puis en définissant par récurrence pour tout entier  $j \geq 2$  :

$$y_j = -\eta \sum_{i=1}^{j-1} G(x_i) \quad \text{et} \quad x_j = \Pi_C(y_j).$$

Pour tout entier  $j \geq 1$  on pose

$$B_j = \|x_j\|^2 - \|x_{j+1}\|^2 - 2 \langle y_{j+1}, x_j - x_{j+1} \rangle.$$

Enfin, on fixe  $x \in C$  et pour tout entier  $j \geq 1$  on pose

$$D_j(x) = \|x\|^2 - \|x_j\|^2 - 2 \langle y_j, x - x_j \rangle.$$

7) Montrer que pour tout entier  $j \geq 1$ ,

$$2\eta \langle G(x), x_j - x \rangle \leq 2\eta \langle G(x_j), x_j - x \rangle = D_j(x) - D_{j+1}(x) + B_j.$$

8) En déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\tilde{x}_\varepsilon \in C$  tel que

$$\forall x \in C, \quad \langle G(x), \tilde{x}_\varepsilon - x \rangle \leq \varepsilon.$$

INDICATION. — On pourra considérer un point de la forme  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$  avec  $N \geq 1$  et  $\eta > 0$  judicieusement choisis.

9) En déduire qu'il existe une solution forte de  $G$  sur  $C$ .

Pour tout entier  $p \geq 1$ , on note  $\Delta_p = \left\{ x = (x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}_+)^p : \sum_{i=1}^p x_i = 1 \right\}$ .

- 10) Soient  $m, n \geq 1$  deux entiers,  $A$  une matrice réelle de taille  $m \times n$ . Soit  $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  la fonction définie par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad G(a, b) = (-Ab, A^T a).$$

On identifie  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  avec  $\mathbb{R}^{m+n}$ .

- a) Montrer  $G$  est un opérateur monotone continu.  
 b) En déduire que

$$\sup_{a \in \Delta_m} \inf_{b \in \Delta_n} \langle a, Ab \rangle = \inf_{b \in \Delta_n} \sup_{a \in \Delta_m} \langle a, Ab \rangle.$$



### Partie III. — Itérations de Krasnoselskii–Mann

*Cette partie introduit les itérations de point fixe de Krasnoselskii–Mann et établit leur convergence.*

- 11) Montrer qu'il existe un entier  $m \geq 1$  et une fonction  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  1-lipschitzienne telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $F(x) \neq x$ .
- 12) Montrer qu'il existe un entier  $m \geq 1$ , un point  $x_* \in \mathbb{R}^m$ , une suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  dans  $\mathbb{R}^m$  et une fonction  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  1-lipschitzienne tels que les trois propriétés suivantes sont vérifiées :
- (i)  $F(x_*) = x_*$ ,
  - (ii)  $\forall k \geq 1, \quad x_{k+1} = F(x_k)$ ,
  - (iii) la suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  ne converge pas.

Soit  $n \geq 1$  un entier et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction 1-lipschitzienne admettant un point fixe  $x_* \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $\theta \in ]0, 1[$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  et pour  $k \geq 1$ , on pose

$$x_{k+1} = x_k + \theta(F(x_k) - x_k).$$

- 13) Montrer que la suite  $(\|x_k - x_*\|)_{k \geq 1}$  est décroissante.  $\checkmark$

14) Soit  $k \geq 1$ . Montrer que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\|^2 + \theta(1 - \theta) \|F(x_k) - x_k\|^2 \\ = (1 - \theta) \|x_k - x_*\|^2 + \theta \|F(x_k) - x_*\|^2. \end{aligned}$$

15) Montrer que la suite  $(\|x_{k+1} - x_k\|)_{k \geq 1}$  converge vers 0.

16) Montrer que la suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  converge vers un point fixe de  $F$ .



## Partie IV. — Théorème de Baillon–Haddad et descente de gradient

*Cette partie porte sur les fonctions convexes dont les gradients sont lipschitziens, établit le théorème de Baillon–Haddad à la question 21), lequel permet enfin d'étudier la convergence de la descente de gradient en l'interprétant comme une itération de Krasnoselskii–Mann.*

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note  $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la fonction gradient qui à  $x \in \mathbb{R}^n$  associe le vecteur

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , si elle existe, on note  $\nabla^2 f(x)$  la matrice hessienne de  $f$  en  $x$  :

$$\nabla^2 f(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On suppose dans toute cette partie que  $f$  est convexe et qu'il existe  $x_* \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\nabla f(x_*) = 0$ . On note  $I$  la fonction identité sur  $\mathbb{R}^n$  et on considère  $L$  un réel strictement positif.

17) Montrer que  $f$  admet un minimum en  $x_*$ .

INDICATION. — Pour un point  $x \in \mathbb{R}^n$  donné, on pourra considérer la fonction  $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\phi_x(t) = f(x_* + t(x - x_*))$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

- 18) Montrer que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla^2 f(x)$  est une matrice symétrique positive.
- 19) Le but de cette question est de montrer que  $\nabla f$  est L-lipschitzienne si, et seulement si,

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad f(x') - f(x) - \langle \nabla f(x), x' - x \rangle \leq \frac{L}{2} \|x' - x\|^2. \quad (P)$$

- a) Montrer que si  $\nabla f$  est L-lipschitzienne, alors la propriété (P) est vraie.  $\checkmark$
- b) Montrer que si la propriété (P) est vraie, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\nabla f(x)\|^2 \leq 2L(f(x) - f(x_*)).$$

- c) Montrer que si la propriété (P) est vraie, alors

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \quad f(x') \geq f(x) + \langle \nabla f(x), x' - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x') - \nabla f(x)\|^2.$$

d) Conclure.

- 20) On suppose dans cette question que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $\nabla f$  est L-lipschitzienne.
- (ii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la matrice  $L I_n - \nabla^2 f(x)$  est symétrique positive, où  $I_n$  désigne la matrice identité de taille  $n \times n$ .
- (iii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , les valeurs propres de  $\nabla^2 f(x)$  appartiennent à  $[0, L]$ .

On ne suppose plus que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et on suppose dorénavant que  $\nabla f$  est L-lipschitzienne.

- 21) Montrer que  $I - \frac{2}{L} \nabla f$  est 1-lipschitzienne.

INDICATION. — On pourra utiliser l'inégalité de la question 19c).

- 22) Soit  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ . Pour  $k \geq 1$ , on définit par récurrence

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{L} \nabla f(x_k).$$

Montrer que la suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  converge et que

$$f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

