

**ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

CONCOURS D'ADMISSION 2026

LUNDI 13 AVRIL 2026

8h00-12h00

MATHEMATIQUES PSI (XUSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, on note $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ les ensembles :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\},$$

$$\text{Im}(A) = \{Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } Y = AX\}.$$

La transposée d'une matrice A est notée A^\top . Lorsque $A = [a] \in M_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a .

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée définie par

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{X^\top X}.$$

L'espace $M_{1,n}(\mathbb{R})$ des vecteurs lignes à n composantes réelles sera identifié à \mathbb{R}^n . On notera également $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, définis de la même manière que dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note X (lettre majuscule) le vecteur colonne appartenant à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Si f est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\nabla f(x)$ son gradient en x défini par

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul. Pour toute fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 , on pose

$$S(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) = 0\}.$$

On note \mathcal{E} l'ensemble de toutes les fonctions f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{2} X^\top M X - B^\top X,$$

où $M \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. On dit dans ce cas que le couple $(M, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$ caractérise la fonction f . On pose

$$\mathcal{E}_0 = \{f \in \mathcal{E} \mid f \text{ est minorée}\}.$$

Si $f \in \mathcal{E}$, on définit la fonction Tf de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (Tf)(x) = \frac{1}{2} \|\nabla f(x)\|^2 - \frac{1}{2} \|\nabla f(0)\|^2.$$

L'un des objectifs principaux de cet énoncé est de démontrer dans des cas particuliers le théorème suivant (Boulmzaoud–Crouzeix–Daniilidis) : si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^2 , minorées, convexes (voir Partie I pour la définition) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\nabla f(x)\| = \|\nabla g(x)\|,$$

alors $f - g$ est constante.

Partie I : généralités sur les fonctions convexes et les fonctions minorées

Dans toute la suite, on dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1 sur \mathbb{R}^n .

(a) Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ fixés et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = f(x + t(y - x)).$$

Exprimer $h'(0)$ en fonction de x, y et du gradient de f .

(b) En déduire l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

(c) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0.$$

(d) Soit $x_0 \in S(f)$. Montrer que $f(x_0)$ est le minimum global de f sur \mathbb{R}^n et que

$$\forall x \in S(f), \quad f(x) = f(x_0).$$

(e) Montrer que $S(f)$ est une partie convexe fermée de \mathbb{R}^n .

2. On suppose dans cette question que f est minorée et de classe C^1 sur \mathbb{R}^n (f n'est plus supposée convexe).

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on définit la fonction f_ε par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}.$$

(a) Soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_\varepsilon(x) \geq f_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Indication : on peut considérer l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon(0)\}$.

(b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon.$$

(c) En déduire que

$$\inf \{\|\nabla f(x)\| \mid x \in \mathbb{R}^n\} = 0.$$

Partie II : le cas monodimensionnel

3. On considère deux fonctions f_1 et f_2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^1 , convexes, minorées et vérifiant la propriété suivante : il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x)^2 - f_2'(x)^2 = c$$

(autrement dit, la fonction $(f_1')^2 - (f_2')^2$ est constante). On rappelle que pour $i \in \{1, 2\}$,

$$S(f_i) = \{x \in \mathbb{R} \mid f_i'(x) = 0\}.$$

(a) Montrer que $c = 0$ et que $S(f_1) = S(f_2)$.

(b) Soit $i \in \{1, 2\}$. Montrer que f_i' est croissante sur \mathbb{R} .

(c) Montrer que $S(f_i)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

(d) Montrer que $f_1' = f_2'$ sur \mathbb{R} .

Indication : on peut distinguer les cas $S(f_1) = \emptyset$ et $S(f_1) \neq \emptyset$.

(e) Conclure.

4. On considère maintenant une fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^2 et minorée. On définit la fonction $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = g'(x)^2.$$

On suppose que R est convexe. On voudrait démontrer que g l'est aussi.

(a) Montrer que

$$S(R) = S(g).$$

(b) On suppose dans cette question que $S(g) = \emptyset$. Montrer que g' est croissante.

(c) On suppose dans cette question que $S(g) \neq \emptyset$. Montrer que g' est croissante.

(d) Montrer que g est convexe.

Indication : on peut fixer $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$ et considérer la fonction $\varphi(t) = g((1-t)x + ty) - (1-t)g(x) - tg(y)$ pour $t \in [0, 1]$.

5. On considère deux fonctions g_1 et g_2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^2 , minorées et vérifiant les propriétés suivantes :

- la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto g_1'(x)^2 \in \mathbb{R}$ est convexe,
- il existe une constante $c_1 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_1'(x)^2 - g_2'(x)^2 = c_1.$$

Montrer que $g_1 - g_2$ est une fonction constante.

Partie III : cas des fonctions quadratiques

6. Soit $f \in \mathcal{E}$ et $(M, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$ un couple qui la caractérise (on rappelle que M est symétrique).

(a) Montrer que

$$(\nabla f(x))^T = MX - B.$$

(b) En déduire que $Tf \in \mathcal{E}_0$.

(c) Montrer que $\text{Ker}(M)^\perp = \text{Im}(M)$ et en déduire que

$$\text{Im}(M) \oplus \text{Ker}(M) = M_{n,1}(\mathbb{R}).$$

(d) En déduire que l'application $X \in \text{Im}(M) \mapsto MX \in \text{Im}(M)$ est un automorphisme de $\text{Im}(M)$.

(e) Montrer que les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{E}_0$.

(ii) $B \in \text{Ker}(M)^\perp$ et $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^t M X \geq 0$.

(iii) f est convexe et $S(f) \neq \emptyset$.

(f) En déduire que si $f \in \mathcal{E}_0$, alors il existe une constante réelle $\alpha > 0$ telle que

$$\forall X \in \text{Im}(M), X^T M X \geq \alpha \|X\|^2.$$

7. Montrer que l'application $T : f \in \mathcal{E}_0 \mapsto Tf \in \mathcal{E}_0$ est surjective.

8. Soient M_1 et M_2 deux matrices symétriques positives telles que $M_1^2 = M_2^2$. Montrer que $M_1 = M_2$.

9. Montrer que l'application $T : f \in \mathcal{E}_0 \mapsto Tf \in \mathcal{E}_0$ est aussi injective.

10. Conclure.

Partie IV : un cas un peu plus général

Dans cette partie on considère deux fonctions f, g de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^1 vérifiant les quatre propriétés suivantes :

- f et g sont convexes minorées,
- la fonction $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|\nabla f(x)\|^2 - \|\nabla g(x)\|^2$ est constante,
- $f + g \in \mathcal{E}$,
- $S(f) \neq \emptyset$.

On pose dans la suite

$$h = f + g, \quad \psi = f - g,$$

et

$$\inf h = \inf \{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ainsi, $h \in \mathcal{E}$. On note $(M, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$ le couple matrice-vecteur colonne caractérisant h .

11. Montrer que $h \in \mathcal{E}_0$.

12. Montrer que nécessairement

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|\nabla f(x)\| = \|\nabla g(x)\|.$$

13. Montrer que

$$S(h) = S(f) = S(g).$$

14. Soient y_1, \dots, y_n des fonctions de classe C^1 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . On note $y = (y_1, \dots, y_n)$ l'application de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^n définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

et on suppose que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt$$

converge (où pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$y'(t) = (y_1'(t), \dots, y_n'(t)).$$

(a) On définit la fonction z de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^n par

$$z(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}(y(t) - y(0)) & \text{si } t > 0 \\ y'(0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Montrer que z est continue sur \mathbb{R}_+ et que pour tout réel $A \geq 0$, on a

$$\int_0^A \|z(t)\|^2 dt \leq 2 \int_0^A \langle z(t), y'(t) \rangle dt.$$

(b) En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \|z(t)\|^2 dt$$

converge et qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \|z(t)\|^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt.$$

(c) Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2 + 1} dt$$

converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2 + 1} dt \leq 8 \int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt + \pi \|y(0)\|^2.$$

15. Dans toute la suite, $Y : t \in [0, +\infty[\mapsto Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne une solution de classe C^1 du système différentiel

$$Y'(t) = -MY(t) + B \quad (E1)$$

On pose $y : t \in [0, +\infty[\mapsto (y_1(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.

(a) Soit $V \in S(h)$. On définit les fonctions F et D sur $[0, +\infty[$ par

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad F(t) = h(y(t)) \quad \text{et} \quad D(t) = \|Y(t) - V\|^2$$

(on rappelle que $V = v^T$). Montrer que F et D sont décroissantes.

Indication : on peut observer que $(\nabla h(x))^T = MX - B$ (voir question 6(a)).

(b) Soient $U \in \text{Im}(M)$, $Y_0 \in \text{Ker}(M)$ et $Y_1 \in \text{Im}(M)$ tels que

$$MU = B \quad \text{et} \quad Y(0) = Y_0 + Y_1.$$

On définit la fonction $Z : [0, +\infty[\rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ par

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad Z(t) = Y(t) - U - Y_0.$$

Justifier l'existence des vecteurs U , Y_0 et Y_1 puis montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$Z'(t) = -MZ(t),$$

et en déduire que pour tout $t \geq 0$, $Z(t) \in \text{Im}(M)$.

(c) Soit ω la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\omega(t) = \|Z(t)\|^2$ pour $t \geq 0$. Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que

$$\forall t \geq 0, \quad \omega'(t) + \beta\omega(t) \leq 0.$$

(d) En déduire que

$$\forall t \geq 0, \quad \omega(t) \leq \omega(0)e^{-\beta t}.$$

(e) En déduire qu'il existe $Y_\infty \in S(h)$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = Y_\infty.$$

(f) Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2 + 1} dt$$

convergent et que

$$\int_0^{+\infty} \|y'(t)\|^2 dt = h(y(0)) - \inf h,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\|y(t)\|^2}{t^2 + 1} dt \leq 8(h(y(0)) - \inf h) + \pi \|y(0)\|^2.$$

16. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla \psi(x), \nabla h(x) \rangle = 0,$$

et en déduire que la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \psi(y(t))$ est constante.

17. Montrer que la fonction ψ est constante puis conclure.

FIN