

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

NOTATIONS

- Soit (E, N) un espace vectoriel (complexe) normé. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans lui-même. Rappelons que la norme d'un élément $T \in \mathcal{L}(E)$ est le nombre réel positif $\|T\| = \sup \{N(T(x)) \mid x \in E, N(x) \leq 1\}$.
- Soient E un espace de Hilbert (complexe) et $T \in \mathcal{L}(E)$. Notons T^* l'adjoint de T . On dit que T est *unitaire* si T est bijectif et $T^{-1} = T^*$.
- Soient I un ensemble non vide et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels *positifs*. On appelle *somme* de cette famille et l'on note $\sum_{i \in I} a_i$ la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des sommes

$\sum_{i \in J} a_i$ lorsque J décrit les parties finies de I .

- On pose $(+\infty)^{1/2} = +\infty$.
- Notons $\mathbb{A}$ l'espace vectoriel complexe des familles $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ de nombres complexes.
- Le *support* d'un élément $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{A}$ est le sous-ensemble $\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid a_{m,n} \neq 0\}$ de $\mathbb{Z}^2$.
- On note $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$ formé des familles de support fini.
- Pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on note $W_{m,n} \in \mathcal{A}$ la famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ telle que $a_{m,n} = 1$ et $a_{p,q} = 0$ si $(p,q) \neq (m,n)$.
- Pour $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{A}$, on pose

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |a_{m,n}| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{a}\|_2 = \left(\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |a_{m,n}|^2 \right)^{1/2}.$$

- On pose $A_1 = \{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_1 \neq +\infty\}$ et $A_2 = \{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_2 \neq +\infty\}$.
- Dans tout le problème on fixe un nombre complexe λ de module 1.

Les parties I.B, II et III sont indépendantes

I. Algèbres de convolution « tordue »

A. La convolution tordue

- (a) Montrer que l'on a $\sum_{(m,n) \in J} |a_{m,n}|^2 \leq \left(\sum_{(m,n) \in J} |a_{m,n}| \right)^2$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ et toute partie finie J de $\mathbb{Z}^2$.

- (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, on a $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$. En déduire que $A_1 \subset A_2$.

Les ensembles A_1 et A_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{A}$. On munit dorénavant A_1 de la norme $\|\cdot\|_1$ et A_2 de la norme $\|\cdot\|_2$. Alors A_1 est un espace de Banach et A_2 est un espace de Hilbert. De plus, $\mathcal{A}$ est dense dans l'espace de Banach A_1 et dans l'espace de Hilbert A_2 . *On ne demande pas de justifier ces faits.*

2. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\sigma : A_1 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\sigma(W_{m,n}) = 1$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

Si $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est un élément de A_1 , on note $\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n}$ le nombre $\sigma(\mathbf{a})$.

3. Soient $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ et $\mathbf{b} = (b_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ des éléments de A_2 .

(a) Soient $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que la famille $(\lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p, n-q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ est un élément de A_1 .

(b) On pose $c_{m,n} = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p, n-q}$.

Montrer que $|c_{m,n}| \leq \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2$ et que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $A \in \mathbb{N}$, tel que, $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, on ait $|m| + |n| \geq A \Rightarrow |c_{m,n}| \leq \varepsilon$ (étudier d'abord le cas où $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$).

On pose $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$.

Si m, m', n, n' sont des entiers relatifs, on a $W_{m,n} \star W_{m',n'} = \lambda^{nm'} W_{m+m', n+n'}$; pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on a $W_{0,0} \star \mathbf{a} = \mathbf{a} \star W_{0,0} = \mathbf{a}$. On ne demande pas de justifier ces faits.

(c) Montrer que, pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_1$ on a $\|\mathbf{a} \star \mathbf{b}\|_1 \leq \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1$.

(d) Montrer que le « produit » $\star$ est associatif sur A_1 .

Dans la suite du problème, on pose $\mathbf{1} = W_{0,0}$, $U = W_{1,0}$ et $V = W_{0,1}$. Pour $\mathbf{a} \in A_1$, on définit $\mathbf{a}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $\mathbf{a}^0 = \mathbf{1}$, et $\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n \star \mathbf{a}$. S'il existe un élément $\mathbf{b} \in A_1$ (nécessairement unique) tel que $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a} = \mathbf{1}$, on dira que $\mathbf{a}$ est *inversible* et on posera $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\mathbf{a}^{-n} = (\mathbf{a}^{-1})^n = (\mathbf{a}^n)^{-1}$.
On remarque que $V \star U = \lambda(U \star V)$ et que, pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $W_{m,n} = U^m \star V^n$.

B. Fonctions périodiques de classe C^1 .

On note B l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 périodiques de période 1, muni de la norme $N : f \mapsto \sup \{|f(t)| + |f'(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$. On note $z \in B$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $z^n \in B$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi nt}$.

1. (a) Montrer que pour tout $f, g \in B$, on a $N(fg) \leq N(f)N(g)$, où l'on a noté fg la fonction $t \mapsto f(t)g(t)$.
- (b) Montrer que le sous-espace de B engendré par la famille $(z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans B .
2. (a) Montrer que, pour tout $f \in B$, la famille $\psi(f)$ définie par

$$\psi(f)_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi mt} dt & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

est un élément de A_1 . Montrer que l'application $\psi : B \rightarrow A_1$ ainsi définie est continue et vérifie $\psi(fg) = \psi(f) \star \psi(g)$ pour tout $f, g \in B$.

Remarquons que l'on a $\psi(z) = U$.

- (b) Soit θ un nombre réel tel que $e^{2i\pi\theta} = \lambda$. Montrer que pour tout $f \in B$ on a l'égalité $V \star \psi(f) = \psi(g) \star V$ où g est la fonction $t \mapsto f(t + \theta)$.

II. Un calcul d'image et de noyau

A. Approximation des réels par des rationnels

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf \{ |x - n| \mid n \in \mathbb{Z} \}$ sa distance à $\mathbb{Z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soient $s_0, \dots, s_{n+1} \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leq i < j \leq n+1$ et $|s_i - s_j| \leq \frac{1}{n+1}$.

(b) Soient $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des entiers i et j satisfaisant $0 \leq i < j \leq n$ et $\delta(t_i - t_j) \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $1 \leq k \leq n$ et $\delta(kt) \leq \frac{1}{n+1}$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, posons $U_\alpha(q) = \{t \in \mathbb{R} \mid \delta(qt) < q^{-\alpha}\}$ et notons $Y_\alpha = \limsup_{q \rightarrow \infty} U_\alpha(q)$ l'ensemble des t qui appartiennent à une infinité de $U_\alpha(q)$.

(a) Montrer que $Y_1 = \mathbb{R}$.

(b) Calculer la mesure de Lebesgue de $U_\alpha(q) \cap [0, 1]$.

(c) Montrer que pour $\alpha > 1$, l'ensemble Y_α est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $Y = \bigcup_{\alpha > 1} Y_\alpha$ est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue).

3. (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble Y_α est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $X = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} Y_\alpha$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que c'est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \notin X$ si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $P(n)\delta(nt) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Un calcul d'image et de noyau

Pour $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on pose $\tau(\mathbf{a}) = a_{0,0}$.

Pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2$, on a $\tau(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = \tau(\mathbf{b} \star \mathbf{a})$. On ne demande pas la vérification de cette formule.

Considérons les applications $S : x \mapsto U \star x \star U^{-1} - x$ et $T : x \mapsto V \star x \star V^{-1} - x$ de A_1 dans lui-même. Notons $L : A_1 \rightarrow A_1 \times A_1$ et $M : A_1 \times A_1 \rightarrow A_1$ les applications linéaires définies par $L(x) = (S(x), T(x))$ et $M(x, y) = S(y) - T(x)$ (pour $x, y \in A_1$).

1. Montrer que $\text{Im} L \subset \text{Ker} M$.

On suppose jusqu'à la fin du II que λ n'est pas une racine de 1. On écrira $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Quel est le noyau de L ?

3. Montrer que l'adhérence de $\text{Im} M$ est $\text{Ker} \tau$. On munit l'espace vectoriel $A_1 \times A_1$ de la norme $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \|\mathbf{a}\|_1 + \|\mathbf{b}\|_1$. Quelle est l'adhérence de $\text{Im} L$?

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\inf \{ \|T(U^k)\|_1 \mid 1 \leq k \leq n \} \leq 2 \sin \frac{\pi}{n+1}.$$

En déduire que l'image de L n'est pas fermée.

5. On note $\mathcal{E} \subset A_1$ le sous-espace vectoriel formé des $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \in A_1$ tels que $a_{0,0} = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(m,n) \mapsto (1+m^2+n^2)^k a_{m,n}$ appartienne à A_1 . Les applications L et M induisent des applications linéaires $L' : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ et $M' : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. A quelle condition sur θ a-t-on $\text{Im} L' = \text{Ker} M'$ et $\text{Im} M' = \mathcal{E}$?

III. Calcul de normes - stabilité par l'inverse

A. La représentation régulière.

1. Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ et tout $\mathbf{b} \in A_2$, on a $\|\mathbf{a} \star \mathbf{b}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2$.

A l'aide de (a), on définit une application linéaire continue $\pi : A_1 \rightarrow \mathcal{L}(A_2)$ satisfaisant $\pi(\mathbf{a})(x) = \mathbf{a} \star x$ et $\|\pi(\mathbf{a})\| \leq \|\mathbf{a}\|_1$ pour $\mathbf{a} \in A_1$ et $x \in A_2$.

2. Montrer que $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\pi(\mathbf{a})\|$ pour tout $\mathbf{a} \in A_1$.

3. Montrer que $\pi(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = \pi(\mathbf{a}) \circ \pi(\mathbf{b})$. Montrer que $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont unitaires.

Pour $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$, on note $\mathbf{a}^* \in \mathbb{A}$ la famille $(b_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ définie par :

$$b_{m,n} = \lambda^{mn} \overline{a_{-m,-n}}.$$

Pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ l'adjoint $\pi(\mathbf{a})^*$ de $\pi(\mathbf{a})$ est $\pi(\mathbf{a}^*)$.

On ne demande pas de justifier cette formule.

B. Un calcul de norme

1. Soient H un espace hilbertien complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. Rappelons que la suite $n \mapsto \|\|T^n\|\|^{1/n}$ est convergente. *On ne demande pas de justifier ce fait.*

Montrer que $\|\|T^* \circ T\|\| = \|\|T\|\|^2$. En déduire que $\|\|T\|\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\|(T^* \circ T)^n\|\|^{1/2n}$.

2. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le nombre d'éléments du support de $\mathbf{a}^n$.

(a) Montrer que $\|\mathbf{a}^n\|_1 \leq \|\mathbf{a}^n\|_2 \sqrt{k_n}$.

(b) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $k_n \leq r^2 n^2$.

(c) Montrer que l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{a}^n\|_2^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi(\mathbf{a}^n)\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{a}^n\|_1^{1/n}$.

(d) Montrer que $\|\pi(\mathbf{a})\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (\mathbf{a}^* \star \mathbf{a})^n \right\|_1^{1/2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tau((\mathbf{a}^* \star \mathbf{a})^{2n}) \right)^{1/4n}$.

C. Deux applications

- Soient H un espace hilbertien complexe et $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des endomorphismes unitaires tels que $vu = \lambda uv$.
 - Montrer qu'il existe un unique homomorphisme continu $\sigma_{u,v} : A_1 \rightarrow \mathcal{L}(H)$ d'algèbres (*i.e.* une application continue qui soit à la fois linéaire et un homomorphisme d'anneaux) satisfaisant $\sigma_{u,v}(U) = u$, $\sigma_{u,v}(V) = v$. Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $\|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\| \leq \|\mathbf{a}\|_1$.
 - Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $\|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\| \leq \|\pi(\mathbf{a})\|$.
- On note A l'adhérence de $\pi(A_1)$ dans $\mathcal{L}(A_2)$. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. On suppose que $\pi(\mathbf{a})$ est inversible dans A .
 - Montrer qu'il existe $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $\|\pi(\mathbf{1} - \mathbf{a} \star \mathbf{b})\| < 1$ et $\|\pi(\mathbf{1} - \mathbf{b} \star \mathbf{a})\| < 1$.
 - Montrer que $\mathbf{a}$ est inversible dans A_1 .

D. Idéaux bilatères et représentations

On suppose que λ n'est pas une racine de 1.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{a} \in A_1$ on pose $\tau_n(\mathbf{a}) = n^{-2} \sum_{0 \leq j, k < n} U^j \star V^k \star \mathbf{a} \star V^{-k} \star U^{-j}$.
 - Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, la suite $\tau_n(\mathbf{a})$ converge dans A_1 vers $\tau(\mathbf{a})\mathbf{1}$ (on pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$).
 - Soit $\mathbf{a} \in A_1$ non nul. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau_n(\mathbf{a}^* \star \mathbf{a})$ soit inversible dans A_1 .
- Montrer que tout idéal bilatère non nul de A_1 est égal à A_1 .
- Soient H un espace hilbertien complexe non nul et $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des endomorphismes unitaires tels que $vu = \lambda uv$. On note $\sigma_{u,v} : A_1 \rightarrow \mathcal{L}(H)$ l'homomorphisme continu d'algèbres satisfaisant $\sigma_{u,v}(U) = u$ et $\sigma_{u,v}(V) = v$.
 - Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ on a $|\tau(\mathbf{a})| \leq \|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\|$.
 - Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $\|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\| = \|\pi(\mathbf{a})\|$.

IV. Une égalité de norme

On considère les espaces hilbertiens suivants :

- $H_{\mathbb{R}}$ désigne l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des classes de fonctions $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ (modulo les fonctions négligeables), muni de la norme $\xi \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.
- $H_{\mathbb{U}}$ désigne l'espace des classes de fonctions $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables périodiques de période 1 telles que $\int_0^1 |\xi(t)|^2 dt < +\infty$ (modulo les fonctions négligeables), muni de la norme $\xi \mapsto \left(\int_0^1 |\xi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

- $H_{\mathbb{Z}}$ désigne l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ des fonctions $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi(n)|^2 < +\infty$, muni de la

$$\text{norme } \xi \mapsto \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

On ne demande pas de vérifier que ce sont des espaces hilbertiens.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On se donne des fonctions $(f_k)_{-N \leq k \leq N}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, périodiques de période 1.

On considère les opérateurs $T_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(H_{\mathbb{R}})$ et $T_{\mathbb{U}} \in \mathcal{L}(H_{\mathbb{U}})$ définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{R}}$ (*resp.* $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{U}}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on note $T_{\mathbb{R}}\tilde{\xi}$ (*resp.*

$T_{\mathbb{U}}\tilde{\xi}$) la classe dans $H_{\mathbb{R}}$ (*resp.* dans $H_{\mathbb{U}}$) de la fonction $t \mapsto \sum_{k=-N}^N f_k(t)\xi(t - k\theta)$.

Si $\xi \in H_{\mathbb{Z}}$, on pose $T_{\mathbb{Z}}\xi(n) = \sum_{k=-N}^N f_k\left(\frac{t}{\theta}\right)\xi(n - k)$.

Montrer que $\|T_{\mathbb{R}}\| = \|T_{\mathbb{U}}\| = \|T_{\mathbb{Z}}\|$.

Corrigé

I. Algèbres de convolution « tordue »

A. La convolution tordue

1. (a) Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ et J une partie finie de $\mathbb{Z}^2$. Posons $\Delta = \{(i, i), i \in J\}$. Puisque $\Delta \subset J^2$ et que $|a_i||a_j| \geq 0$ (pour $(i, j) \in J^2$), on a

$$\sum_{i \in J} |a_i|^2 = \sum_{(i,j) \in \Delta} |a_i||a_j| \leq \sum_{(i,j) \in J^2} |a_i||a_j| = \left(\sum_{i \in J} |a_i| \right)^2.$$

- (b) De (a) on déduit que, pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}$ et toute partie finie J de $\mathbb{Z}^2$, on a l'encadrement : $\sum_{i \in J} |a_i|^2 \leq \left(\sum_{i \in J} |a_i| \right)^2 \leq \|\mathbf{a}\|_1^2$. Prenant le sup de ces quantités, on trouve

donc $\|\mathbf{a}\|_2^2 \leq \|\mathbf{a}\|_1^2$, d'où l'inégalité $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$.

Si $\mathbf{a} \in A_1$, alors $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1 < +\infty$, donc $\mathbf{a} \in A_2$.

2. Pour $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, posons $\sigma(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n} = \sum_{(m,n) \in \text{Supp } \mathbf{a}} a_{m,n}$, où l'on a noté $\text{Supp } \mathbf{a}$ le support de $\mathbf{a}$. Il est clair que σ est linéaire et que $\sigma(W_{m,n}) = 1$.

On a $\left| \sum_{(m,n) \in \text{Supp } \mathbf{a}} a_{m,n} \right| \leq \sum_{(m,n) \in \text{Supp } \mathbf{a}} |a_{m,n}|$, donc $|\sigma(\mathbf{a})| \leq \|\mathbf{a}\|_1$.

En particulier, σ est une forme linéaire continue sur l'espace normé $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_1)$ (et $\|\sigma\| = 1$). Par densité, elle admet un unique prolongement linéaire et continu $\sigma : A_1 \rightarrow \mathbb{C}$.

Soit $\sigma' : A_1 \rightarrow \mathbb{C}$ une autre forme linéaire continue vérifiant $\sigma'(W_{m,n}) = 1$. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$.

On a $\mathbf{a} = \sum_{(m,n) \in \text{Supp } \mathbf{a}} a_{m,n} W_{m,n}$, donc $\sigma'(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n) \in \text{Supp } \mathbf{a}} a_{m,n} \sigma'(W_{m,n}) = \sigma(\mathbf{a})$. Ainsi, les

formes linéaires continues σ et σ' coïncident sur $\mathcal{A}$; par densité elles sont égales.

3. (a) Pour $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, posons $d_{p,q} = \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p, n-q}$; posons $\mathbf{d} = (d_{p,q})$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|\mathbf{d}\|_1 = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} |d_{p,q}| \leq \left(\sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} |\lambda^{q(m-p)} a_{p,q}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} |b_{m-p, n-q}|^2 \right)^{1/2} = \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2,$$

donc $\mathbf{d} \in A_1$.

- (b) On a, par définition, $c_{m,n} = \sigma(\mathbf{d})$. Il vient, $|c_{m,n}| \leq \|\sigma\| \|\mathbf{d}\|_1 \leq \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2$.

Supposons que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$; posons

$$M = \sup\{|p + p'| + |q + q'|; (p, q) \in \text{Supp } \mathbf{a}; (p', q') \in \text{Supp } \mathbf{b}\}.$$

Comme $\text{Supp } \mathbf{a} \times \text{Supp } \mathbf{b}$ est fini, ce « sup » est atteint, donc $M \neq +\infty$.

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|m| + |n| > M$. Pour tout $(p, q) \in \text{Supp } \mathbf{a}$ et $(p', q') \in \text{Supp } \mathbf{b}$, on a $(p + p', q + q') \neq (m, n)$. Donc, pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a $a_{p,q} = 0$, ou $b_{m-p, n-q} = 0$. La famille $\left(\lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p, n-q} \right)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ est donc nulle, donc $c_{m,n} = 0$.

Passons au cas général. Soit $\varepsilon > 0$, il existe (par densité de $\mathcal{A}$ dans A_2) des éléments $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathcal{A}$ tels que $\|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\|_2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_2 \|\mathbf{b}'\|_2 \leq \varepsilon$. Posons

$$M = \sup\{|p + p'| + |q + q'|; (p, q) \in \text{Supp } \mathbf{a}'; (p', q') \in \text{Supp } \mathbf{b}'\}.$$

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|m| + |n| > M$. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a $a'_{p,q} b'_{m-p, n-q} = 0$, donc

$$a_{p,q} b_{m-p, n-q} = a_{p,q} (b_{m-p, n-q} - b'_{m-p, n-q}) + (a_{p,q} - a'_{p,q}) b'_{m-p, n-q}.$$

On trouve alors

$$c_{m,n} = \left(\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} (b_{m-p, n-q} - b'_{m-p, n-q}) \right) + \left(\sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} (a_{p,q} - a'_{p,q}) b'_{m-p, n-q} \right).$$

Or par ce qui précède, $\left| \sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} (b_{m-p, n-q} - b'_{m-p, n-q}) \right| \leq \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\|_2$ et

$$\left| \sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} (a_{p,q} - a'_{p,q}) b'_{m-p, n-q} \right| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_2 \|\mathbf{b}'\|_2. \text{ Alors, il vient}$$

$$\begin{aligned} |c_{m,n}| &\leq \left| \sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} (b_{m-p, n-q} - b'_{m-p, n-q}) \right| + \left| \sum_{p,q} \lambda^{q(m-p)} (a_{p,q} - a'_{p,q}) b'_{m-p, n-q} \right| \\ &\leq \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b} - \mathbf{b}'\|_2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|_2 \|\mathbf{b}'\|_2 \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) Écrivons $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$, on a $|c_{m,n}| \leq \sum_{p,q} |a_{p,q}| |b_{m-q, n-p}|$. Donc

$$\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_1 \leq \sum_{m,n} \sum_{p,q} |a_{p,q}| |b_{m-q, n-p}| = \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1.$$

(d) On a

$$\begin{aligned} (W_{m,n} \star_\lambda W_{m',n'}) \star_\lambda W_{m'',n''} &= \lambda^{nm'} W_{m+m', n+n'} \star_\lambda W_{m'',n''} \\ &= \lambda^{nm' + (n+n')m''} W_{m+m'+m'', n+n'+n''} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W_{m,n} \star_\lambda (W_{m',n'} \star_\lambda W_{m'',n''}) &= \lambda^{n'm''} W_{m,n} \star_\lambda W_{m'+m'', n'+n''} \\ &= \lambda^{n(m'+m'') + n'm''} W_{m+m'+m'', n+n'+n''} \\ &= (W_{m,n} \star_\lambda W_{m',n'}) \star_\lambda W_{m'',n''} \end{aligned}$$

Par linéarité, on trouve $(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c})$ pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{A}$. A l'aide de (c), on en déduit l'égalité $(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c})$ pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A_1$ - par densité de $\mathcal{A}$ dans A_1 .

B. Fonctions périodiques de classe C^1 .

1. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $(fg)'(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t)$, donc

$$\begin{aligned} |(fg)(t)| + |(fg)'(t)| &\leq |f(t)||g(t)| + |f(t)||g'(t)| + |f'(t)||g(t)| \\ &\leq (|f(t)| + |f'(t)|)(|g(t)| + |g'(t)|) \\ &\leq N(f)N(g). \end{aligned}$$

Prenant le « sup » sur $t \in \mathbb{R}$, on trouve $N(fg) \leq N(f)N(g)$.

- (b) Soient $f \in B$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes a_k pour $-n \leq k \leq n$ tels que $\sup\{|f'(t) - P(t)|; t \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon$ où l'on a posé $P(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{2i\pi kt}$.

Puisque $\int_0^1 f'(t) dt = 0$, il vient $|a_0| = \left| \int_0^1 P(t) dt \right| \leq \varepsilon$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $Q(t) = f(0) + \int_0^t (P(s) - a_0) ds$; la fonction Q est périodique de période 1 et appartient à l'espace vectoriel engendré par z^k pour $-n \leq k \leq n$. Pour $t \in [-1/2, 1/2]$, on a $|f(t) - Q(t)| = \left| \int_0^t (f'(s) - P(s) + a_0) ds \right| \leq \varepsilon$. On trouve alors $N(f - Q) \leq 3\varepsilon$.

2. (a) Notons $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ de B dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ la transformation de Fourier et $i : \ell^1(\mathbb{Z}) \rightarrow A_1$ l'application qui à une suite $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ associe la famille $(b_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ définie par

$$b_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ a_m & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On a $\psi = i \circ \mathcal{F}$. L'application $\mathcal{F}$ est continue et on a $\widehat{fg} = \widehat{f} \star \widehat{g}$. De plus, i est continue car isométrique et l'on a clairement $i(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = i(\mathbf{a}) \star_\lambda i(\mathbf{b})$.

- (b) Si $f = z^n$, on a $g = \lambda^n z^n$, donc $\psi(g) \star_\lambda V = \lambda^n \psi(f) \star_\lambda V = \lambda^n U^n \star_\lambda V = V \star_\lambda U^n = V \star_\lambda \psi(f)$. Le cas général en résulte par linéarité et continuité de ψ .

II. Un calcul d'image et de noyau

A. Approximation des réels par des rationnels

1. (a) Quitte à réordonner les s_i , on peut supposer que la suite s_i est croissante. On a $\sum_{k=0}^n s_{k+1} - s_k = s_{n+1} - s_0 \leq 1 - 0$. Il existe donc k tel que $s_{k+1} - s_k \leq \frac{1}{n+1}$.
- (b) Pour $i = 0, \dots, n$, posons $s_i = t_i - t_0 - E(t_i - t_0)$ où E désigne la partie entière; posons aussi $s_{n+1} = 1$. Par (a), il existe i, j avec $0 \leq i < j \leq n+1$ tels que $|s_i - s_j| \leq \frac{1}{n+1}$. Si $j \neq n+1$, on trouve $|(t_i - t_j) - p| \leq \frac{1}{n+1}$, où p est un entier ($p = E(t_i - t_0) - E(t_j - t_0)$). Si $j = n+1$, on trouve $|t_i - t_0 - p| \leq \frac{1}{n+1}$ avec $p = E(t_i - t_0) + 1$. Remarquons que dans ce cas $i \neq 0$ puisque $1 > \frac{1}{n+1}$.
- (c) Posons $t_i = it$; il existe i, j avec $0 \leq i < j \leq n$ tels que $\delta(t_i - t_j) \leq \frac{1}{n+1}$. On pose alors $k = j - i$; on trouve $\delta(kt) \leq \frac{1}{n+1}$.
2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t = \frac{p}{q}$ est rationnel, alors $t \in U_\alpha(nq)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout α . Donc $t \in Y_\alpha$ pour tout α . Supposons que t soit irrationnel. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et notons $\varepsilon = \inf\{\delta(kt); 1 \leq k \leq n_0\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)\varepsilon > 1$. Par 1.(c), il

existe $q \leq n$ tel que $\delta(qt) \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Par définition de ε , on a $q > n_0$; de plus $\delta(qt) \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{q}$, donc $t \in U_1(q)$. Cela montre que $t \in Y_1$.

(b) On a $U_\alpha(q) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left] \frac{p}{q} - q^{-\alpha-1}, \frac{p}{q} + q^{-\alpha-1} \right[$. Si $2q^{-\alpha} > 1$, on a $U_\alpha(q) = \mathbb{R}$; sinon, $U_\alpha(q) \cap [0, 1]$ est réunion disjointe de $[0, q^{-\alpha-1}[$ de $]1 - q^{-\alpha-1}, 1]$ et des intervalles $\left] \frac{p}{q} - q^{-\alpha-1}, \frac{p}{q} + q^{-\alpha-1} \right[$ pour $1 \leq p \leq q-1$. Sa mesure est donc $\inf(1, 2q^{-\alpha})$.

(c) Notons μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha > 1$ on a $\sum_q \mu(U_\alpha(q) \cap [0, 1]) < +\infty$. Par le théorème de Borel-Cantelli, on

a $\mu(Y_\alpha \cap [0, 1]) = 0$. Il est clair que $Y_\alpha \cap [n, n+1] = \{t+n; t \in Y_\alpha \cap [0, 1]\}$, donc $\mu(Y_\alpha \cap [n, n+1]) = 0$ (par invariance par translation de μ).

On a $\mu(Y_\alpha) \leq \sum \mu(Y_\alpha \cap [n, n+1]) = 0$.

Pour $\alpha \geq \beta$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $U_\alpha(q) \subset U_\beta(q)$, donc $Y_\alpha \subset Y_\beta$.

Il s'ensuit que $\bigcup_{\alpha > 1} Y_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_{\frac{n+2}{n+1}}$. Donc Y est une réunion dénombrable d'ensembles négligeables : c'est une partie négligeable de $\mathbb{R}$.

3. (a) Par définition, on a $Y_\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{q > n} U_\alpha(q) \right)$. L'ensemble Y_α est donc une intersection

dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. De plus par ce qui précède $X = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} Y_\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_{n+1}$

est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Enfin, on a déjà noté que $\mathbb{Q} \subset X$, donc X est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Supposons que $t \in X$, et soit P un polynôme (à coefficients réels); soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ strictement plus grand que le degré de P .

Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, $P(n) < n^\alpha$. L'ensemble $\{n; \delta(nt) < n^{-\alpha}\}$ étant infini, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n) < n^\alpha$ et $\delta(nt) < n^{-\alpha}$, donc $\delta(nt)P(n) < 1$.

Supposons que $t \notin X$. Alors il existe $q \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on peut supposer entier tel que $t \notin Y_q$; l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^*; \delta(nt) < n^{-q}\}$ étant fini, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a\delta(nt) \geq 1$ pour tout n dans cet ensemble. Posons alors $P(t) = t^q + a$. On a bien $P(n)\delta(nt) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Un calcul d'image et de noyau

1. On a $V \star_\lambda U = \lambda U \star_\lambda V$. Donc, pour tout $x \in A_1$, on a

$$(V \star_\lambda U) \star_\lambda x \star_\lambda (V \star_\lambda U)^{-1} = (U \star_\lambda V) \star_\lambda x \star_\lambda (U \star_\lambda V)^{-1}.$$

On en déduit que $S \circ T = T \circ S$, donc $M \circ L = 0$.

2. Soit $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ un élément de A_1 . Écrivons $L(\mathbf{a}) = ((b_{m,n}), (c_{m,n}))$.

On a $b_{m,n} = (\lambda^{-n} - 1)a_{m,n}$ et $c_{m,n} = (\lambda^m - 1)a_{m,n}$. Si $\mathbf{a} \in \text{Ker } L$, alors pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, on a $(\lambda^{-n} - 1)a_{m,n} = (\lambda^m - 1)a_{m,n} = 0$. Si $m \neq 0$ (resp. $n \neq 0$) alors $\lambda^m - 1 \neq 0$ (resp. $\lambda^{-n} - 1 \neq 0$) donc $a_{m,n} = 0$. Il vient $\text{Ker } L = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

3. Puisque $\tau(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) = \tau(\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a})$, on a $\tau \circ S = \tau \circ T = 0$, donc $\tau \circ M = 0$.

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Les éléments $S(W_{m,n})$ et $T(W_{m,n})$ sont proportionnels à $W_{m,n}$ et l'un des deux au moins est non nul. Il en résulte que $W_{m,n} \in \text{Im} M$, donc l'adhérence de $\text{Im} M$ est $\text{Ker} \tau$.

Posons $E = \text{Ker} M \cap (\text{Ker} \tau \times \text{Ker} \tau)$. On sait déjà que $\text{Im} L \subset \text{Ker} M$. Par ailleurs, si $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \text{Im} L$, il est clair que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{Ker} \tau$, donc $\text{Im} L \subset E$. Comme E est un sous espace fermé de $A_1 \times A_1$, l'adhérence de $\text{Im} L$ est incluse dans E . Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, posons aussi $E_{m,n} = \{(aW_{m,n}, bW_{m,n}); (a, b) \in \mathbb{C}^2\} \cap E$. Il est clair que, pour $(m, n) \neq (0, 0)$, $E_{m,n}$ est de dimension 1 et engendré par $L(W_{m,n})$. Par ailleurs, si $x = ((a_{m,n}), (b_{m,n})) \in E$, alors x est somme de la famille sommable $x_{m,n} = (a_{m,n}W_{m,n}, b_{m,n}W_{m,n})$. Comme $x_{m,n} \in E_{m,n}$, il en résulte que x est adhérent au sous-espace engendré par les $E_{m,n}$, lui-même contenu dans $\text{Im} L$, soit $x \in \overline{\text{Im} L}$. Cela prouve que $\overline{\text{Im} L} = E$.

4. Remarquons que pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta} - 1| = 2|\sin \theta/2|$, donc

$$\|T(U^k)\|_1 = |e^{2ik\pi\theta} - 1| = 2 \sin \pi\delta(k\theta).$$

Par A.1.(c), il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\delta(k\theta) \leq \frac{1}{n+1}$, donc

$$\inf\{\|T(U^k)\|_1; 1 \leq k \leq n\} \leq 2 \sin \frac{\pi}{n+1}.$$

On peut démontrer que l'image de L n'est pas fermée par des calculs analogues à ceux de la question suivante. Donnons une méthode basée sur le théorème de Banach : Si l'image de L était fermée, l'application linéaire continue $\text{Ker} \tau \rightarrow E$ déduite de L serait bijective ; ce serait un homéomorphisme par le théorème de Banach. Il existerait donc une constante $c > 0$ telle que l'on ait $\|L(x)\|_1 \geq c\|x\|_1$ pour tout $x \in \text{Ker} \tau$. Ce n'est pas le cas par ce qui précède puisque $U^k \in \text{Ker} \tau$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\|L(U^k)\|_1 = \|T(U^k)\|_1$.

5. Soit $((a_{m,n}), (b_{m,n})) \in \text{Ker} M'$. Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, posons

$$c_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } (m, n) = (0, 0) \\ a_{0,n}(\lambda^{-n} - 1)^{-1} & \text{si } m = 0 \text{ et } n \neq 0 \\ b_{m,0}(\lambda^m - 1)^{-1} & \text{si } n = 0 \text{ et } m \neq 0 \\ a_{m,n}(\lambda^{-n} - 1)^{-1} = b_{m,n}(\lambda^m - 1)^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que $((a_{m,n}), (b_{m,n})) \in \text{Im} L'$ si et seulement si $(c_{m,n}) \in \mathcal{E}$.

Reprenons les notations de A.3. Si $\theta \notin X$, il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que $|c_{m,n}| \leq P(|m| + |n|)(|a_{m,n}| + |b_{m,n}|)$; il en résulte que $(c_{m,n}) \in \mathcal{E}$ pour tout $((a_{m,n}), (b_{m,n})) \in \text{Ker} M'$, donc $\text{Im} L' = \text{Ker} M'$.

Dans ce cas, pour tout $(a_{m,n}) \in \mathcal{E}$, posons $b_{m,n} = (1 - \lambda^m)^{-1}a_{m,n}$ si $m \neq 0$ et $b_{0,n} = 0$ et $c_{m,0} = (\lambda^{-n} - 1)^{-1}a_{0,n}$ si $n \neq 0$, $c_{m,n} = 0$ dans tous les autres cas. On vérifie sans peine que $((b_{m,n}), (c_{m,n})) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ et $M'((b_{m,n}), (c_{m,n})) = (a_{m,n})$, donc $\text{Im} L' = \mathcal{E}$.

Si $\theta \in X$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^k \delta(n\theta) < 1$. On peut construire une suite strictement croissante $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout k on ait $n_k \in \mathbb{N}^*$ et $\delta(\theta n_k) n_k^k < 1$. Posons alors

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 - \lambda^{n_k} & \text{si } m = 0 \text{ et } n = n_k \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

et $b_{m,n} = 0$. Alors $((a_{m,n}), (b_{m,n})) \in \text{Ker} M'$ mais $((a_{m,n}), (b_{m,n})) \notin \text{Im} L'$.

De plus, $(a_{m,n}) \notin \text{Im} M'$, donc $\text{Im} M' \neq \mathcal{E}$.

III : Calcul de normes - stabilité par l'inverse

A. La représentation régulière.

1. Soient $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)} \in A_1$ et $\mathbf{b} = (b_{m,n})_{(m,n)} \in A_2$. Écrivons $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n)}$. On a $\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_2 = \sup \left\{ \sum_{m,n} |c_{m,n}| |d_{m,n}|; \mathbf{d} = (d_{m,n})_{(m,n)} \in \mathcal{A}; \|\mathbf{d}\|_2 \leq 1 \right\}$.

Soit $\mathbf{d} = (d_{m,n})_{(m,n)} \in \mathcal{A}$. Pour $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $c_{m,n} \leq \sum_{p,q} |a_{p,q}| |b_{m-p,n-q}|$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |c_{m,n}| |d_{m,n}| &\leq \sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}| |b_{m-p,n-q}| |d_{m,n}| \\ &\leq \left(\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}| |b_{m-p,n-q}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}| |d_{m,n}|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Sommant d'abord par m, n , on trouve

$$\sum_{m,n,p,q} |a_{p,q}| |b_{m-p,n-q}|^2 = \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2^2,$$

donc

$$\sum_{m,n} |c_{m,n}| |d_{m,n}| \leq \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2 \|\mathbf{d}\|_2.$$

Cela étant vrai pour tout $\mathbf{d}$, on trouve $\|\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_2$.

2. On a $\mathbf{a} = \mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{1} = \pi(\mathbf{a})(\mathbf{1})$, donc $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\pi(\mathbf{a})\| \|\mathbf{1}\|_2 = \|\pi(\mathbf{a})\|$.

3. Pour $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A_1$, on a

$$(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) \star_\lambda \mathbf{c} = \mathbf{a} \star_\lambda (\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{c}) \text{ par I.A.3.(d), donc } \pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b})(\mathbf{c}) = (\pi(\mathbf{a}) \circ \pi(\mathbf{b}))(\mathbf{c}).$$

Les applications linéaires continues $\pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b})$ et $\pi(\mathbf{a}) \circ \pi(\mathbf{b})$ coïncident sur le sous-espace dense A_1 de A_2 . Elles sont donc égales.

Remarquons que $\pi(\mathbf{1}) = \text{id}_{A_2}$, donc $\pi(U) \circ \pi(U^{-1}) = \pi(U^{-1}) \circ \pi(U) = \text{id}_{A_2}$.

Par ailleurs, comme $\|U\|_1 = \|U^{-1}\|_1 = 1$, on trouve $\|\pi(U)\| \leq 1$ et $\|\pi(U^{-1})\| \leq 1$. On en déduit que, pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on a $\|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_2$.

Or $\mathbf{a} = \pi(\mathbf{1})(\mathbf{a}) = \pi(U^{-1}) \circ \pi(U)(\mathbf{a})$, donc $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2$. On en déduit que $\|\pi(U)(\mathbf{a})\|_2^2 = \|\mathbf{a}\|_2^2$. Notons $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire de A_2 .

Par l'identité de polarisation, on trouve $\langle \pi(U)(\mathbf{a}) | \pi(U)(\mathbf{b}) \rangle = \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2$ ce qui s'écrit $\langle \pi(U)^* \circ \pi(U)(\mathbf{a}) | \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$. On en déduit que $\pi(U)^* \circ \pi(U)(\mathbf{a}) - \mathbf{a}$ est orthogonal à A_2 donc est nul. Cela étant vrai pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on trouve $\pi(U)^* \pi(U) = \text{id}_{A_2}$. Comme U est inversible, on trouve $\pi(U)^* = \pi(U)^{-1}$.

De même, $\pi(V)$ est unitaire.

B. Un calcul de norme

1. Il est clair que $\|\pi(T^* \circ T)\| \leq \|\pi(T)\|^2$. Pour tout $x \in A_2$ tel que $\|x\|_2 = 1$, on a $\|T(x)\|^2 = \langle x | T^* \circ T(x) \rangle \leq \|T^* \circ T(x)\|_2 \leq \|\pi(T^* \circ T)\|$.

Prenant le « sup » sur x , on trouve $\|\pi(T)\|^2 \leq \|\pi(T^* \circ T)\|$. Appliquant ceci à $(T^* \circ T)^{2^k}$, on trouve (par récurrence) que $\|\pi(T^* \circ T)^{2^k}\| = \|\pi(T)\|^{2^k}$. La suite convergente $\|\pi(T^* \circ T)^n\|^{1/n}$ admet une sous-suite constante (pour $n = 2^k$) et $\|\pi(T^* \circ T)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi(T^* \circ T)^n\|^{1/n}$.

Donc $\|\pi(T)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi(T^* \circ T)^n\|^{1/2n}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le nombre d'éléments du support de $\mathbf{a}^n$.

(a) Écrivons $\mathbf{a}^n = (b_{p,q})_{p,q} \in \mathbb{Z}^2$.

Pour $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ posons $c_{p,q} = 0$ si $b_{p,q} = 0$ et $b_{p,q}c_{p,q} = |b_{p,q}|$ pour tout (p, q) . On a $\|(c_{p,q})\|_2 = \sqrt{k_n}$ et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \langle (b_{p,q}) | (c_{p,q}) \rangle \leq \|\mathbf{a}\|_2 \sqrt{k_n}.$$

(b) Il existe $p_0, p_1, q_0, q_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $a_{p,q} \neq 0 \Rightarrow p_0 \leq p \leq p_1$ et $q_0 \leq q \leq q_1$. Posons alors $r = 1 + \max(p_1 - p_0, q_1 - q_0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le support de $\mathbf{a}^n$ est contenu dans $\{(p, q); np_0 \leq p \leq np_1, \text{ et } nq_0 \leq q \leq nq_1\}$, donc

$$k_n \leq (n(p_1 - p_0) + 1)(n(q_1 - q_0) + 1) \leq n^2 r^2.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|\mathbf{a}^n\|_2 \leq \|\pi(\mathbf{a}^n)\| \leq \|\mathbf{a}^n\|_1 \leq rn\|\mathbf{a}^n\|_2$;
comme $\lim(rn)^{1/n} = 1$, (c) en résulte.

(d) Appliquant les résultats de (c) à $\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}$, on trouve

$$\|\pi(\mathbf{a})\|^2 = \lim \left\| \pi((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n) \right\|^{1/n} = \lim \left\| (\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n \right\|_1^{1/n} = \lim \left\| (\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n \right\|_2^{1/n}.$$

$$\text{Or } \left\| (\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n \right\|_2^2 = \tau((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}), \text{ d'où l'on trouve } \|\pi(\mathbf{a})\| = \lim \left(\tau((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}) \right)^{1/4n}.$$

C. Deux applications

1. (a) Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}^2$, $u^m \circ v^n$ est un unitaire de $\mathcal{L}(H)$, donc $\|u^m \circ v^n\| = 1$. Soit $\mathbf{a} \in A_1$. La famille $(a_{m,n} u^m \circ v^n)_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est normalement sommable donc sommable (puisque $\mathcal{L}(H)$ est un espace de Banach). Posons

$$\sigma_{u,v}(\mathbf{a}) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} a_{m,n} u^m \circ v^n.$$

On a $\|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\| = \left\| \sum a_{m,n} u^m \circ v^n \right\| \leq \sum \|a_{m,n} u^m \circ v^n\| = \|\mathbf{a}\|_1$. En particulier, $\sigma_{u,v}$ est continue.

Il est clair que $\sigma_{u,v}(W_{m,n}) = u^m \circ v^n$. En particulier $\sigma_{u,v}(U) = u$, $\sigma_{u,v}(V) = v$.

On a $\sigma_{u,v}(W_{m,n})\sigma_{u,v}(W_{p,q}) = u^m \circ v^n \circ u^p \circ v^q = \lambda^{np} u^{m+p} \circ v^{n+q} = \sigma_{u,v}(W_{m,n} \star_\lambda W_{p,q})$. Par linéarité et continuité, pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_1$ on a $\sigma_{u,v}(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) = \sigma_{u,v}(\mathbf{a})\sigma_{u,v}(\mathbf{b})$.

Si $\sigma' : A_1 \rightarrow \mathcal{L}(H)$ vérifie aussi ces propriétés, à l'aide des propriétés $\mathbf{1} \star_\lambda U = U$, $U^{-1} \star_\lambda U = \mathbf{1}$ et $V^{-1} \star_\lambda V = \mathbf{1}$ on trouve successivement $\sigma'(\mathbf{1}) = \text{id}_H$, $\sigma'(U^{-1}) = u^{-1}$, $\sigma'(V^{-1}) = v^{-1}$, puis $\sigma'(W_{m,n}) = \sigma'(U^m \star_\lambda V^n) = u^m \circ v^n$. Il en résulte que σ' coïncide avec $\sigma_{u,v}$ sur $\mathcal{A}$ (par linéarité), donc sur A_1 (par continuité).

(b) On a $\sigma_{u,v}(\mathbf{a}^*) = \sigma_{u,v}(\mathbf{a})^*$ pour tout $\mathbf{a} \in A_1$. On en déduit que

$$\|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\| = \lim \|\sigma_{u,v}(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\|^{1/2n} \leq \lim \|(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^n\|_1^{1/2n} = \|\pi(\mathbf{a})\|.$$

2. (a) Soit $x = \pi(\mathbf{a})^{-1}$. Comme π est continue, $\mathcal{A}$ est dense dans A_1 et $\pi(A_1)$ est dense dans A , $\pi(\mathcal{A})$ est dense dans A . Il existe donc $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $\|\pi(\mathbf{b}) - x\| \|\mathbf{a}\|_1 < 1$. On a alors $\|\pi(\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}) - \text{id}_{A_2}\| = \|\pi(\mathbf{a})(\pi(\mathbf{b}) - x)\| < 1$ et $\|\pi(\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a}) - \text{id}_{A_2}\| < 1$.

- (b) Posons $x = \mathbf{1} - \mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b}$. On a $\lim \|x^n\|^{1/n} = \lim \|\pi(x)^n\|^{1/n} \leq \|\pi(x)\| < 1$. Par la règle de Cauchy, la série de terme général $\|x^n\|_1$ est convergente, donc la série de terme général x^n est convergente dans l'espace de Banach A_1 . On en déduit que $\mathbf{a} \star_\lambda \mathbf{b} = \mathbf{1} - x$ est inversible dans A_1 (d'inverse $\sum x^n$). De même $\mathbf{b} \star_\lambda \mathbf{a}$ est inversible dans A_1 . Il en résulte que $\mathbf{a}$ admet un inverse à droite et un inverse à gauche donc est inversible dans A_1 .

D. Idéaux bilatères et représentations

1. (a) Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ et $0 \leq j, k < n$, on a $U^j \star_\lambda V^k \star_\lambda W_{p,q} \star_\lambda V^{-k} \star_\lambda U^{-j} = \lambda^{kp-jq} W_{p,q}$, donc $\tau_n(W_{p,q}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-jq}\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{kp}\right) W_{p,q}$. Il en résulte que, si $(p, q) \neq (0, 0)$, la suite $\tau_n(W_{p,q})$ converge vers 0 dans A_1 . Par linéarité, la suite $\tau_n(\mathbf{a})$ converge dans A_1 vers $\tau(\mathbf{a})\mathbf{1}$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Soient $\mathbf{a} \in A_1$ et $\varepsilon > 0$; il existe $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_1 < \varepsilon/3$. Par ce qui précède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\|\tau_n(\mathbf{b}) - \tau(\mathbf{b})\mathbf{1}\|_1 < \varepsilon/3$. Remarquons que, pour tout $\mathbf{c} \in A_1$ on a $\|\tau_n(\mathbf{c})\|_1 \leq \|\mathbf{c}\|_1$, donc, pour $n \geq N$, on a

$$\|\tau_n(\mathbf{a}) - \tau(\mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 \leq \|\tau_n(\mathbf{a} - \mathbf{b})\|_1 + \|\tau_n(\mathbf{b} - \tau(\mathbf{b})\mathbf{1})\|_1 + \|\tau(\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 < \varepsilon.$$

- (b) Puisque $\mathbf{a} \neq 0$, on a $\tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|_2^2 > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a $\|\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a}) - \tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})\mathbf{1}\|_1 < \tau(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$, donc $\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$ est inversible dans A_1 .

2. Soit J un idéal bilatère non nul de A_1 et $\mathbf{a}$ un élément non nul de J . Alors J contient tous les $\tau_n(\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})$, donc un élément inversible de A_1 , donc $J = A_1$.

3. (a) Pour tout n on a $\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a})) = n^{-2} \sum_{0 \leq j, k < n} u^j \circ v^k \circ \sigma_{u,v}(\mathbf{a}) \circ v^{-k} \circ u^{-j}$,

$$\text{donc } \|\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a}))\| \leq \|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\|.$$

Or par 1.(a), on a $\lim \|\sigma_{u,v}(\tau_n(\mathbf{a}))\| = |\tau(\mathbf{a})|$, donc $|\tau(\mathbf{a})| \leq \|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\|$.

- (b) Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\| \sigma_{u,v}((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}) \right\|^{1/4n} \geq \left| \tau((\mathbf{a}^* \star_\lambda \mathbf{a})^{2n}) \right|^{1/4n}$.

Dans cette inégalité, le membre de gauche converge vers $\|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\|$ et celui de droite vers $\|\pi(\mathbf{a})\|$. On en déduit $\|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\| \geq \|\pi(\mathbf{a})\|$, d'où l'égalité.

L'égalité $\|\sigma_{u,v}(\mathbf{a})\| = \|\pi(\mathbf{a})\|$ s'en déduit par densité de $\mathcal{A}$ dans A_1 .

IV : Une égalité de norme

Notons $v_{\mathbb{R}}$, $v_{\mathbb{U}}$ et $v_{\mathbb{Z}}$ les opérateurs unitaires définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{R}}$ (resp. $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{U}}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on note $v_{\mathbb{R}}(\tilde{\xi})$ (resp. $v_{\mathbb{U}}(\tilde{\xi})$) la classe dans $H_{\mathbb{R}}$ (resp. dans $H_{\mathbb{U}}$) de la fonction $t \mapsto \xi(t + \theta)$. Si $\xi \in H_{\mathbb{Z}}$, on pose $(v_{\mathbb{Z}}(\xi))(n) = \xi(n + 1)$.

Reprenons les notations de la partie I.B. Si $g \in B$, notons $\rho_{\mathbb{R}}(g)$, $\rho_{\mathbb{U}}(g)$ et $\rho_{\mathbb{Z}}(g)$ les opérateurs définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{R}}$ (resp. $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{U}}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on note $(\rho_{\mathbb{R}}(g))(\tilde{\xi})$ (resp. $(\rho_{\mathbb{U}}(g))(\tilde{\xi})$) la classe dans $H_{\mathbb{R}}$ (resp. dans $H_{\mathbb{U}}$) de la fonction $t \mapsto g(t)\xi(t)$. Si $\xi \in H_{\mathbb{Z}}$, on pose $((\rho_{\mathbb{Z}}(g))(\xi))(n) = g(n\theta)\xi(n)$. Posons $u_{\mathbb{R}} = \rho_{\mathbb{R}}(z)$, $u_{\mathbb{U}} = \rho_{\mathbb{U}}(z)$ et $u_{\mathbb{Z}} = \rho_{\mathbb{Z}}(z)$. On vérifie immédiatement que l'on a

$$v_{\mathbb{R}} \circ u_{\mathbb{R}} = \lambda u_{\mathbb{R}} \circ v_{\mathbb{R}}, \quad v_{\mathbb{U}} \circ u_{\mathbb{U}} = \lambda u_{\mathbb{U}} \circ v_{\mathbb{U}} \quad \text{et} \quad v_{\mathbb{Z}} \circ u_{\mathbb{Z}} = \lambda u_{\mathbb{Z}} \circ v_{\mathbb{Z}}.$$

Par III.C.1, il existe des homomorphismes

$$\sigma_{\mathbb{R}} : A_1 \rightarrow \mathcal{L}(H_{\mathbb{R}}), \sigma_{\mathbb{U}} : A_1 \rightarrow \mathcal{L}(H_{\mathbb{U}}) \text{ et } \sigma_{\mathbb{Z}} : A_1 \rightarrow \mathcal{L}(H_{\mathbb{Z}})$$

tels que $\sigma_{\mathbb{R}}(U) = u_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{R}}(V) = v_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(U) = u_{\mathbb{U}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(V) = v_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}}(U) = u_{\mathbb{Z}}$, $\sigma_{\mathbb{Z}}(V) = v_{\mathbb{Z}}$.

Les homomorphismes $\sigma_{\mathbb{R}} \circ \psi$ et $\rho_{\mathbb{R}}$ prennent la même valeur $u_{\mathbb{R}}$ en z , donc en z^n . Ils coïncident par I.B.1.(b). De même, $\sigma_{\mathbb{U}} \circ \psi = \rho_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}} \circ \psi = \rho_{\mathbb{Z}}$.

Posons $T = \sum_{k=-N}^N \psi(f_k) V^k$. On a $\sigma_{\mathbb{R}}(T) = T_{\mathbb{R}}$, $\sigma_{\mathbb{U}}(T) = T_{\mathbb{U}}$ et $\sigma_{\mathbb{Z}}(T) = T_{\mathbb{Z}}$.

Par III.D, on a $\|T_{\mathbb{R}}\| = \|T_{\mathbb{U}}\| = \|T_{\mathbb{Z}}\| = \|\pi(T)\|$.

Rapport des correcteurs

Ce problème porte sur le « tore non commutatif » ou algèbre de la rotation irrationnelle - c'est-à-dire sur l'algèbre engendrée par deux opérateurs unitaires u et v tels que $vu = \lambda uv$ où λ est un nombre complexe de module 1 (qui n'est pas une racine de l'unité). Dans ce problème on démontre que l'algèbre engendrée par u et v ne dépend pas des unitaires u et v vérifiant cette relation (paragraphe III.D). Le paragraphe IV propose une application de ce résultat.

Le deuxième paragraphe établit un résultat un peu technique qui est apparu dans un calcul lié à la cohomologie cyclique de cette algèbre. Ce résultat ne sert pas dans la suite.

L'analyse fonctionnelle et hilbertienne, les propriétés de prolongement par continuité des applications linéaires continues, l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont présentes tout le long du problème. On a cependant cherché à proposer quelques questions portant sur d'autres thèmes d'analyse : Fourier, théorie de la mesure, propriété de Baire...

Bien de candidats ont trouvé ce problème très long. La moitié des candidats n'ont pas dépassé les deux premières parties. La plupart des autres se sont arrêtés après la partie III.A ou III.B.

I. Algèbres de convolution tordue

Dans cette partie, on introduit l'objet principal d'étude. Comme dans la suite du problème, plusieurs propriétés simples mais fastidieuses sont admises.

I.A La convolution tordue

Cette partie préparatoire introduit la convolution tordue et en établit les principales propriétés et notations qui serviront dans la suite.

Les questions sont ici assez classiques et faciles - et ont été généralement bien comprises. Une des difficultés était de décider jusqu'à quel point il fallait détailler l'argumentation.

I.B Fonctions périodiques de classe C^1

On utilise ici le théorème de Stone-Weierstrass et la décomposition en séries de Fourier.

Cette partie, assez difficile s'est avérée discriminante.

Signalons quelques écueils :

- le théorème de Stone-Weierstrass tout seul ne suffit pas pour démontrer que les polynômes trigonométriques forment un sous-espace dense pour la topologie C^1 .
- L'appel aux fonctions de classe C^1 suggérerait à tort qu'on devait utiliser le théorème de Dirichlet. Par contre, ce que l'on utilisait est que la transformation de Fourier définit une application continue de C^1 dans ℓ^1 .

II. Un calcul d'image et de noyau

II.A Approximation des réels par des rationnels

On démontre ici que les nombres réels qui admettent de bonnes approximations par les rationnels sont « rares » pour la théorie de la mesure (leur mesure est nulle) mais très courants du point de vue de la topologie (ils forment un G^δ -dense).

La question 1.b a malheureusement joué un rôle de question « STOP ». De bons candidats s'y sont arrêtés et ne sont guère allés plus loin. À l'inverse, certains ont « sauté la difficulté » et ont poursuivi sur des questions plus faciles qui suivaient, ce qui était une bonne stratégie.

II.B Un calcul d'image et de noyau

Il s'agit ici d'un calcul utilisé en cohomologie cyclique. On y démontre qu'une certaine cohomologie est nulle si et seulement si le nombre λ n'admet pas de bonnes approximations par des racines de l'unité.

Les premières questions de cette partie étaient relativement faciles. On pouvait ici invoquer le théorème de Banach à la question 4, même si une démonstration bien plus élémentaire était possible.

La 5e question se basait sur la partie II.A, et était plus difficile. Cette question sert ici un peu de prétexte pour la partie II.A et n'est plus utilisé dans la suite.

III. Calcul de normes stabilité par l'inverse

Dans la partie III, on étudie les représentations de notre algèbre de convolution tordue, c'est-à-dire les couples d'unitaires u, v qui vérifient $vu = \lambda uv$. On construit d'abord la représentation régulière. On montre qu'elle est dans un sens « plus grosse » que toute autre représentation, et que l'on ne perd rien en termes de spectre dans cette représentation. Enfin, si λ n'est pas racine de 1, notre algèbre est *simple*. Cela permet de démontrer, à l'aide de la partie I.B, une égalité de norme dans la 4e partie.

Les parties III.A et III.B comportaient des questions relativement faciles et ont été abordées par plusieurs candidats. Très peu de candidats ont dépassé ces parties.