4.2 Corrigé

Corrigé AP08

I.

I.A. Généralités et exemples.

1. (a) $E_\lambda(f)\bigcap E_\mu(f)$ est vide pour λ,μ distincts et $\bigcup\limits_{\lambda\in\mathbf{R}} E_\lambda(f) = I^2$

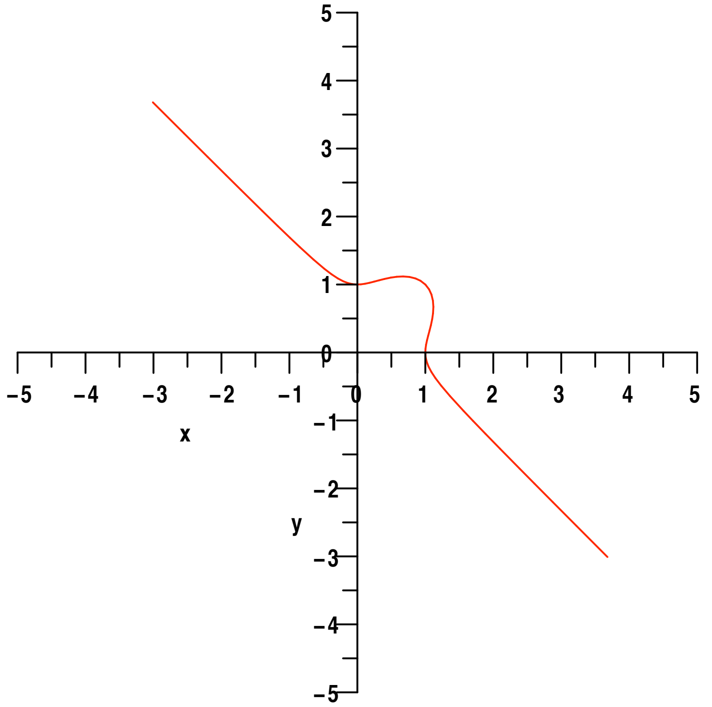
   (b) $E_\lambda(f)$ est l'image réciproque du fermé $\{\lambda\}$ par l'application continue $(x,y)\to f(x)+f(y)$. C'est donc un fermé de I^2. Tous les $E_\lambda(f)$ sont invariants par la transformation $(x,y)\to(y,x)$ donc sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

   (c) g est définie sur l'intervalle J obtenu par translation de $-x_0$ à partir de I. $E_\lambda(f)$ est l'image de $E_\lambda(g)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{T}=(x_0,x_0)$

2. $E_\lambda(f)$ est l'ensemble d'équation $x^2+y^2=\lambda$. Donc :
   si $\lambda<0$, $E_\lambda(f)$ est vide
   si $\lambda=0$, $E_\lambda(f)$ est le point $(0,0)$
   si $\lambda>0$, $E_\lambda(f)$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

3. $E_0(f)$ a pour équation $x-x^3+y-y^3=0$ soit $(x+y)(x^2-xy+y^2-1)=0$; C'est donc la réunion de la droite **D** d'équation $x+y=0$ et de la conique **C** d'équation $x^2-xy+y^2=1$. Cette conique est bien une ellipse car la forme quadratique $(x,y)\to x^2+xy+y^2$ est définie positive.

4. Cette fois ci $E_0(f)$ a pour équation $x^2+y^2=x^3+y^3$, ce qui donne, en écrivant $x=\rho\cos t, y=\rho\sin t$, $\rho^2(1-\rho(\cos^3 t+\sin^3 t))=0$. $E_0(f)$ est donc la réunion du point $(0,0)$ et de la courbe γ d'équation polaire $\rho(t)=\dfrac{1}{\cos^3 t+\sin^3 t}$.



I.B.Racine carrée d'une fonction positive.

5. (a) $f''(0) > 0$ donc puisque $f'(0) = 0$, f' est du signe de x au voisinage de zéro. Comme f' ne s'annule qu'en zéro on en déduit qu'elle est du signe de x sur $\mathbf{R}$ tout entier. f est donc décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et croissante sur $\mathbf{R}_+$.

   (b) La formule de Taylor donne $f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)dt = \int_0^x (x-t)f''(t)dt$. Pour x non nul on fait dans cette intégrale le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ et on obtient le résultat voulu. pour x nul le résultat demandé est évident.

   (c) la fonction g est de classe infinie par application du théorème de dérivation sous le signe intégrale dont toutes les hypothèses sont satisfaites. On a $g(0) = \frac{f''(0)}{2} > 0$. Par ailleurs pour x non nul $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ est non nul et positif d'après l'étude des variations de f.

   (d) Puisque g est strictement positive la fonction $\sqrt{g}$ est également de classe infinie. On pose alors $h(x) = x\sqrt{g(x)}$. On a bien $f = h^2$ et h de classe infinie. Pour x non nul $h(x)$ est du signe de x, de même que$f'(x)$. l'égalité $2h(x)h'(x) = f'(x)$ assure alors $h'(x) > 0$. De plus on a
   $h'(0) = \lim_0 \frac{h(x)}{x} = \sqrt{g(0)} > 0$. h' est positive et ne s'annule pas, donc h est un difféomorphisme de I sur $J =]-\sqrt{\lim_a f(x)}, \sqrt{\lim_b f(x)}[$

I.C. Ovales du plan.

6. Notons $\mathscr{C}_\lambda$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \lambda$ et introduisons l'application

$$\phi : (x, y) \mapsto (h(x), h(y))$$

   ϕest un difféomorphisme de I^2 sur J^2 puisque elle est bijective de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que son jacobien au point (x, y) vaut $h'(x)h'(y) \neq 0$.
   Comme $E_\lambda(f) = \{(x, y), h^2(x) + h^2(y) = \lambda\}$ on a $E_\lambda(f) = \phi^{-1}(\mathscr{C}_\lambda \bigcap J^2)$ et donc le résultat voulu.

7. L'existence et l'unicité de la solution maximale sont assurées par le théorème de Cauchy. Notons s cette solution et $\mathscr{I}_s$ son intervalle de définition.

   (a) Supposons par exemple qu'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors la fonction $t \mapsto (0, y(t_0)e^{-t+t_0})$ est solution de (S) et vaut $(x(t_0), y(t_0))$ en $t = t_0$. Pourtant en $t = 0$ elle vaut $(0, y(t_0)e^{t_0}) \neq (x_0, y_0)$. Il y a donc deux solutions différentes au même problème de Cauchy en t_0. C'est impossible. S'il existe t_0 tel que $y(t_0) = 0$ on aboutit à la même contradiction avec la fonction $t \mapsto (x(t_0)e^{t-t_0}, 0)$.

   (b) Commençons par remarquer que $g(x(t)) + g(y(t))$ est bien défini et se dérive en
   $x'(t)(1 - \frac{1}{x(t)}) + y'(t)(1 - \frac{1}{y(t)}) = (1 - y(t))(x(t) - 1) + (-1 + x(t))(y(t) - 1) = 0$
   Par conséquent $g(x(t)) + g(y(t)) = g(x_0) + g(y_0)$ pour tout t ce qui prouve que le support de la solution est inclus dans $E_\lambda(g)$ pour $\lambda = g(x_0) + g(y_0)$.

   Reste à voir que c'est un ovale : comme $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $g''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, 1 est l'unique point critique de g et il est non dégénéré. De plus $g(1) = 0$. Donc l'hypothèse **(H)** est vérifiée pour la fonction f telle que $f(x-1) = g(x)$ (nous savons d'après la question 1.c qu'une translation de la variable ne change pas le type). Comme ici on a $g(]0, 1[) = g(]1, +\infty[) = \mathbf{R}^+$, le carré J^2 est égal au plan tout entier. Enfin, comme $(x_0, y_0) \neq (1, 1)$ on a $\lambda > 0$. La question 6. s'applique donc, et $E_\lambda(g)$ est un ovale.

II.

1. (a) $\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$

 (b) la fonction cos est homomorphe et ne s'annule par sur le disque ouvert de centre 0 de rayon $\frac{\pi}{2}$ donc $z \mapsto \frac{1+\sin z}{\cos z}$ est holomorphe sur ce même disque, ce qui assure l'existence (et l'unicité) de la série. Les coefficients b_n sont réels car ce sont les dérivées successives en 0 de $\frac{1+\sin z}{\cos z}$ qui est réel pour z réel.

 (c) La fonction H est déjà holomorphe sur le disque ouvert $\left\{z, |z| < \frac{3\pi}{2}\right\}$ privé des points $\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}$.

 Lorsque deux fonctions holomorphes g_1, g_2 s'annulent en z_0, le quotient $\frac{g_1}{g_2}$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de z_0 si et seulement si l'ordre du zéro z_0 pour g_1 est supérieur ou égal à son ordre pour g_2.
 or $z_0 = -\frac{\pi}{2}$ est un zéro d'ordre 1 des fonctions $g_1(z) = \sin z + 1$ et $g_2(z) = \cos z$, puisque les deux fonctions s'annulent en z_0 et pas leurs dérivées. Ceci prouve que H se prolonge en $-\frac{\pi}{2}$.

 Pour $z_0 = \frac{\pi}{2}$ on peut écrire $H(z) = \dfrac{(z-\frac{\pi}{2})(1+\sin z) + 2\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})\cos z} = \dfrac{g_1(z)}{g_2(z)}$. z_0 est zéro d'ordre 2 pour g_2 et comme $g_1(z_0) = g_1'(z_0) = 0$ il est d'ordre au moins 2 pour g_1. Donc par le même argument, H se prolonge en $\frac{\pi}{2}$.

 (d) Pour z voisin de zéro on a $\dfrac{4}{2z-\pi} = \sum_0^\infty \dfrac{-2^{n+2}}{\pi^{n+1}} z^n$, donc $H(z) = \sum_0^\infty (\dfrac{b_n}{n!} - \dfrac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}}) z^n$. Comme H est holomorphe sur $\{z, |z| < \frac{3\pi}{2}\}$, le rayon de convergence de cette série est au moins égal à $\frac{3\pi}{2}$. La série converge pour $z = \frac{\pi}{2}$ donc en particulier $(\dfrac{b_n}{n!} - \dfrac{2^{n+2}}{\pi^{n+1}})(\dfrac{\pi}{2})^n = o(1)$ ce qui donne directement l'équivalent voulu.

2. (a) Une permutation σ étant représentée par le n-uplet $(\sigma(a_0), ..., \sigma(a_{n-1}))$ on a :

 pour $n = 2$, une seule permutation alternante : (a_0, a_1)

 pour $n = 3$, deux permutations alternantes : (a_0, a_2, a_1) et (a_1, a_2, a_0)

 pour $n = 4$, cinq permutations alternantes : (a_0, a_2, a_1, a_3), (a_0, a_3, a_1, a_2), (a_1, a_2, a_0, a_3), (a_1, a_3, a_0, a_2) et (a_2, a_3, a_0, a_1)

 (b) Notons $\mathscr{AL}$ (resp. $\mathscr{AAL}$) l'ensemble des permutations alternantes (resp. antialternantes). Soit τ la permutation qui inverse les a_i : $\tau = (a_{n-1}, ..., a_1, a_0)$. Alors l'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de $\mathscr{AL}$ sur $\mathscr{AAL}$. Les deux ensembles ont donc le même cardinal.

 (c) Comptons de deux façons différentes le nombre de permutations de $n+1$ éléments $a_0, ..., a_n$ qui sont alternantes ou antialternantes.

 D'une part ce nombre vaut $2e_{n+1}$ d'après la question précédente et le fait que les ensembles $\mathscr{AL}$ et $\mathscr{AAL}$ sont disjoints.

 D'autre part, choisir un élément σ de $\mathscr{AL} \bigcup \mathscr{AAL}$ c'est successivement :
 - Choisir parmi $\{0, .., n\}$ l'indice i tel que $\sigma(a_i) = a_0$ (noter que la parité de cet indice détermine si σ est alternante ou antialternante).
 - Choisir parmi $\{a_1, .., a_n\}$ le sous ensemble S_i des images par σ de $\{a_0, ..., a_{i-1}\}$. Il y a $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ choix pour cet ensemble ; ce choix détermine l'ensemble T_i des images de $\{a_{i+1}, .., a_n\}$.

– Choisir les deux restrictions de σ :
$\sigma_1 : \{a_0, ..., a_{i-1}\} \mapsto S_i$
$\sigma_2 : \{a_{i+1}, ..., a_n\} \mapsto T_i$
Si i est pair, la condition $\sigma \in \mathscr{AL} \bigcup \mathscr{AAL} \Leftrightarrow \sigma \in \mathscr{AL}$ est réalisé si et seulement si σ_1 est alternante et σ_2 antialternante (cette définition a bien un sens même si ce ne sont pas des permutations)
Si i est impair on a $\sigma \in \mathscr{AL} \bigcup \mathscr{AAL} \Leftrightarrow \sigma \in \mathscr{AAL}$ si et seulement si σ_1 et σ_2 sont antialternantes.
Dans les deux cas il y a $e_i e_{n-i}$ choix pour σ. Finalement on a bien

$$2e_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) e_i e_{n-i}$$

(d) Posons $f(x) = \sum_0^\infty \frac{e_n}{n!} x^n$. Cette série est définie au moins sur $]-1,1[$ puisque $e_n \leqslant n!$ On a :

$f^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{e_i}{i!} \frac{e_{n-i}}{(n-i)!} \right) x^n$
$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{e_i}{i!} \frac{e_{n-i}}{(n-i)!} \right) x^n$
$= 1 + 2 \sum_1^\infty \frac{e_{n+1}}{n!} x^n$
$= 1 + 2 (\sum_0^\infty \frac{e_{n+1}}{n!} x^n - 1)$
$= 1 + 2(f'(x) - 1)$

Un calcul direct prouve que la fonction $x \mapsto \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ vérifie la même équation différentielle. Comme les deux fonctions prennent la valeur 1 en zéro, elles sont égales au voisinage de zéro d'après le théorème de Cauchy. Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit pour tout n $e_n = b_n$.

III.

1. Sur $]x_i, x_{i+1}[$ f croit pour tout i pair et décroit pour tout i impair. Elle décroit sur $]-\infty, x_0[$. Sur le dernier intervalle $]x_{n-1}, +\infty[$ f croit si n impair et décroit si n pair.
2. (a) $f = f \circ Id$ donne la réflexivité. Pour la symétrie, $f = g \circ h \Rightarrow g = f \circ h^{-1}$ et h^{-1} est un difféomorphisme croissant si h l'est. $f = g \circ h, g = g' \circ h' \Rightarrow f = g' \circ (h' \circ h)$ et puisque $h' \circ h$ est aussi un difféomorphisme croissant, $\sim$ est transitive.

   (b) Si $f = g \circ h$, introduisons l'application

$$\phi : (x, y) \mapsto (h(x), h(y))$$

   Comme à la question **I.6**, ϕ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ et $E_\lambda(f) = \phi^{-1}(E_\lambda(g))$
3. -h étant un difféomorphisme croissant les limites de f et de $g = f \circ h$ sont les mêmes.
-$f'(x) = h'(x) g'(h(x))$ prouve, puisque h' ne s'annule pas que les points critiques de f sont exactement les $x_k(f) = h(x_k(g))$. Il y en a bien le même nombre et ils sont rangés dans le même sens par croissance de h. Les valeurs critiques sont bien les mêmes.
-Enfin $f'' = h'' g' \circ h + h'^2 g'' \circ h$ donne $f''(x_k(f)) = h'^2(x_k(f)) g''(x_k(g))$ et les points critiques de f sont non dégénérés si et seulement si ceux de g le sont. Comme $f(x_k(f)) = g(x_k(g))$ les permutations σ_f et σ_g sont égales.

4. (a) Pour tout k les restrictions f_k et g_k des applications f et g à $[x_k(f), x_{k+1}(f)]$ et $[x_k(g), x_{k+1}(g)]$ sont des homéomorphismes sur leur image (et même des difféomorphismes si l'on restreint aux intervalles ouverts). Comme $\sigma_f = \sigma_g$ ces images sont toutes les deux $[\sigma_f(a_k), \sigma_f(a_{k+1})]$. On peut définir $h_k = g_k^{-1} \circ f_k$ sur $[x_k(f), x_{k+1}(f)]$. Cette application h est continue et strictement croissante car f_k et g_k ont la même monotonie. Enfin les égalités $h_k(x_k(f)) = x_k(g), h_k(x_{k+1}(f)) = x_{k+1}(g)$ assurent que h_k et h_{k+1} se raccordent en une fonction h continue et strictement croissante, donc bijective. On traiterait de même le cas des intervalles $]-\infty, x_0]$ et $[x_{n-1}, +\infty[$. De plus, vues les limites de f et g on a $h(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

   Pour l'unicité, notons que l'égalité $f = g \circ h$ restreinte à $[x_k(f), x_{k+1}(f)]$ devient $f_k = g_k \circ h$ puisque, étant données les conditions imposées à h, on a forcément $h([x_k(f), x_{k+1}(f)]) = [x_k(g), x_{k+1}(g)]$, et donc $h_{|[x_k(f), x_{k+1}(f)]} = h_k$.

   (b) Soit $k \in \{0, ..., n-1\}$ Soit un intervalle I contenant $x_k(f)$ et aucun autre point critique de f. Alors d'après la première partie on peut écrire sur $I, f(x) = f(x_k(f)) + \epsilon\phi(x)^2$, où ϕ est un difféomorphisme croissant et ϵ est le signe de $f''(x_k(f))$. Avec des notations analogues on a $g(x) = g(x_k(g)) + \epsilon\psi(x)^2$ sur tout J contenant $x_k(g)$ et aucun autre point critique de g(ϵ est le même dans les deux cas). De $f = g \circ h$ on déduit sur I que $\phi^2(x) = \psi^2(h(x))$, d'où par croissance $\phi(x) = \psi(h(x))$ soit encore $h(x) = \psi^{-1}(\phi(x))$ ce qui prouve que h est un difféomorphisme sur I. Comme les intervalles I où cette construction est possible recouvrent $\mathbf{R}$, h est bien un difféomorphisme.

5. (a) D'après ce qui précède pour chaque permutation σ_f il y a au plus une classe de $\sim$. les variations de f étudiées à la question **1.** prouvent que σ_f est alternante. Il y a donc au maximum b_n classes pour $\sim$.

   (b) Il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ rÈels $a_i + a_j$ qui délimitent $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ intervalles ouverts. f étant fixée, lorsque λ parcourt $\mathbf{R}$ le nombre de types possibles pour $E_\lambda(f)$ est donc majoré par $n(n+1)+1$. Compte tenu de la question précédente, lorsqu'on fait varier f le nombre total de types possible est majoré par $(n(n+1)+1)b_n$.

6. (a) Avec les notations de la question **4.** $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j) = \{(x, y), y = f_j^{-1}(\lambda - f_i(x))\}$ C'est donc le graphe d'une fonction strictement monotone définie sur l'intervalle fermé $f_i^{-1}(\lambda - f_j(I_j))$.

   (b) Pour tout $(a, b) \in E_\lambda(f)$ on a a ou b qui n'est pas un point critique de f vu que $\lambda \neq a_i + a_j$. Par conséquent, l'une des deux dérivées partielles de $(x, y) \mapsto f(x) + f(y)$ est non nulle en (a, b). Par le théorème des fonctions implicites, $E_\lambda(f)$ est localement un graphe en chacun de ses points. Il en que résulte que $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$ n'est pas réduit à un point (il possède donc deux extrémités si son intervalle de définition est un segment et une seule si son intervalle de définition est non borné) et que ses extrémités sont sur la frontière du rectangle.

   (c) Comme $\lambda \neq a_i + a_j$ un sous graphe ne contient aucun (a_i, a_j). Or un point du plan autre que les (a_i, a_j) ne peut appartenir qu'à deux rectangles $I_i \times I_j$ distincts et alors il est sur leur frontière commune.

   (d) Commençons par noter que si n est impair, f est minorée d'après ses variations. Soit M sa borne inférieure, alors pour $(x, y) \in E_\lambda(f)$ on a $M \leqslant f(x) \leqslant \lambda - M$ et $M \leqslant f(y) \leqslant \lambda - M$. Comme les limites de f sont infinies, ceci prouve que $E_\lambda(f)$ est borné, donc tous ses sous graphes aussi.

   Lorsque n est pair, compte tenu des variations de f les seuls sous graphes pouvant être non bornés sont $E_\lambda(f) \cap (I_0 \times I_n)$ et $E_\lambda(f) \cap (I_n \times I_0)$. Le premier est le graphe d'une fonction définie sur $f_0^{-1}(\lambda - f(I_n)) = f_0^{-1}([\lambda - f(x_{n-1}), +\infty[)$ qui est un intervalle de la forme $]-\infty, b]$, donc il est non borné. le second est symétrique du premier par rapport à la droite $x = y$.

7. (a) Considérons une famille maximale $\{S_1, ..., S_p\}$ de sous-graphes distincts ayant la propriété de l'énoncé. alors $C = S_1 \cup ... \cup S_p$ est une composante connexe. En effet :

   C est connexe car les S_i sont tous connexes et $S_i \cap S_{i+1} \neq \emptyset$.

   C ne rencontre aucun sous graphe autre que les S_i par maximalité et d'après la question **6.c.**. Donc toute partie C' contenant strictement C n'est pas connexe.

De plus, toutes les composantes connexes sont de ce type puisque chaque élément de $E_\lambda(f)$ est dans un sous graphe et que tout sous graphe est dans une famille maximale du type précédent.

(b) Supposons que S_1 soit borné : il possède deux extrémités. Alors l'une n'est pas commune à S_2 car deux sous graphes ne peuvent avoir les deux mêmes extrémités. Cette extrémité est dans un sous-graphe par **6.c** donc dans un des S_i par maximalité, et donc forcément dans S_p vu qu'un sous-graphe n'a que 2 extrémités. il en résulte que S_p est borné. Le même raisonnement vaut dans l'autre sens et par conséquent les deux sous graphes non bornés du cas pair sont dans la même composante. Il y a donc dans ce cas une unique composante connexe non bornée.

(c) Gardons la notation $C = S_1 \cup \ldots \cup S_p$. Puisque S_1 et S_p ont une extrémité commune on pourra aussi noter S_0 pour S_p et S_{p+1} pour S_1. Comme S_i est un graphe d'une fonction continue sur un segment il possède un paramétrage de la forme

$$\begin{aligned} [a,b] &\to \mathbf{R}^2 \\ x &\mapsto (x,\phi(x)) \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable affine $t = \dfrac{i-1}{p} + \dfrac{(x-a)}{p(b-a)}$ on obtient un paramétrage :

$$\begin{aligned} [\frac{i-1}{p},\frac{i}{p}] &\to \mathbf{R}^2 \\ t &\mapsto M(t) = (x(t),y(t)) \end{aligned}$$

Les deux extrémités de S_i sont alors les points $M(\frac{i-1}{p}), M(\frac{i}{p})$. Quitte à refaire un changement affine, on peut supposer que $S_i \cap S_{i-1} = M(\frac{i-1}{p})$ et $S_i \cap S_{i+1} = M(\frac{i}{p})$

de sorte que les fonctions M définies séparément sur chaque $[\frac{i-1}{p},\frac{i}{p}]$ se raccordent en une fonction continue sur $[0,1]$. Comme de plus $M(0) = M(1)$ (ce sont les extrémités communes de S_1 et S_p), l'application

$$\begin{aligned} S^1 &\to \mathbf{R}^2 \\ e^{2\pi i t} &\mapsto M(t) \end{aligned}$$

est définie, continue et réalise une bijection de S^1 sur C.

8. Dans une composante connexe, deux sous-graphes consécutifs correspondent à des paires d'indices $(i,j),(i',j')$ telles que $|i-i'|+|j-j'| = 1.(*)$

   Dans le cas où n est pair, la composante connexe non bornée contient les sous-graphes relatifs aux indices $(i,j) = (n,0)$ et $(i',j') = (0,n)$. Cette composante connexe contient donc au minimum $1+|n-0|+|0-n| = 2n+1$ sous graphes.

   Pour les composantes bornées la relation $(*)$ assure que le nombre de sous-graphes est pair différent de 2, donc au moins égal à 4.

   Comme il y a au maximum $(n+1)^2$ sous-graphes le nombre d'ovales est majoré par

   $\dfrac{(n+1)^2}{4}$ si n impair

   $\dfrac{(n+1)^2-(2n+1)}{4} = \dfrac{n^2}{4}$ si n est pair.

9. (a) Les deux exemples des questions **I.3** et **I.4** n' ont pas d'ovales bien que la fonction f soit un serpent à 2 points critiques. dans le premier cas on a deux valeurs critiques opposées a_1, a_2 et $\lambda = a_1 + a_2 = 0$, dans le second cas, $a_1 = 0$ est valeur critique et on a $\lambda = a_1 + a_1 = 0$.

   (b) Dans le cas particulier $n = 2$ il y a au maximum un ovale. De plus le type de $E_\lambda(f)$ ne dépend pas des valeurs de a_0, a_1. En effet on peut composer f à gauche par une transformation affine T qui envoie (a_0, a_1) sur $(-1,1)$ (par exemple) et $E_\lambda(T\circ f)$ est égal à $E_\mu(f)$ pour $\mu = T(\lambda)+T(0)$.

Or dans le cas de l'exemple du **I.A.3** la fonction f est impaire et possède deux points critiques opposés, et donc $E_\lambda(f)$ et $E_{-\lambda}(f)$ sont de même type. Il en résulte qu'il n'y a que 4 types possibles :

1. $\lambda = 0$
2. $\lambda \in]0, 2a_1[$
3. $\lambda = 2a_1$
4. $\lambda > 2a_1$

Les types 1. et 3. sont ceux mis en évidence à la question précédente, le type 2. et le type 4. (qui sont effectivement différents, même si on ne l'a pas prouvé) correspondent au cas où l'on a respectivement 1 et 0 ovale.

IV.

1. Soit (x_n) une suite de l' image de Φ qui converge dans V vers x. Notons y_n un antécédent de x_n. La suite (y_n) est dans $\phi^{-1}(K)$ où K est le compact $\{x_n, n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$. Vu l'hypothèse sur Φ, (y_n) possède une valeur d'adhérence l et on a par continuité $\Phi(l) = x$. Donc x est dans l'image de Φ

   L'image de Φ est ouverte et fermée, donc c'est V par connexité.
2. C est la distance pour la norme 1 de l'origine au sous espace affine E_n. Comme ce dernier est de dimension finie, cette distance est atteinte, en particulier elle est non nulle.
3. Il est classique que l'appli cation $P \mapsto (P(t_1), \dots, P(t_{n-1}))$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_{n-2}[X]$ sur $\mathbf{R}^{n-1}$. L'image d'une base $(R_1, \dots, R_{n-1})$ est une base. D'où le résultat.
4. Il s'agit de montrer que Φ est bien à valeurs dans Ω_2. On a $y_1 > 0$ puisque P_x est positif sur l'intervalle $[0, x_1]$. De plus pour tout i, sur $[x_i, x_{i+1}]$ P_x est du signe de $t(x_1 - t)\dots(x_i - t)$ c'est à dire du signe de $(-1)^i$. Donc $y_{i+1} - y_i$ est du signe de $(-1)^i$ ce qui est exactement la propriété voulue.

   On a $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\displaystyle\int_0^{x_j} P_x(t)\,dt = \int_0^{x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} P_x(t)\,dt$pour tout (i, j) tel que $i \neq j$ par dérivation sous le signe intégrale. Lorsque j vaut i, il faut en plus dériver la borne et l'on obtient
   $$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^{x_i} P_x(t)\,dt = \int_0^{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} P_x(t)\,dt + P_x(x_i)$$
   ce qui donne le même résultat vu que x_i est racine de P_x.
   Or $\dfrac{\partial}{\partial x_i} P_x = \dfrac{P_x}{x_i - x}$ donc $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\displaystyle\int_0^{x_j} P_x(t)\,dt = x_j^2 Q_{i,x}(x_j)$.
   Soit J la matrice jacobienne de Φ. $\det J = \det(x_j^2 Q_{i,x}(x_j)) = \prod_j (x_j)^2 \det(Q_{i,x}(x_j))$. Ce déterminant est non nul d'après le résultat **3** sous réserve que les polynômes $Q_{i,x}$ qui sont bien de degré $n-2$ forment une famille libre.
   Mais si l'on suppose $\sum \lambda_i Q_{i,x} = 0$ alors en multipliant par x^2 puis en dérivant et en divisant par P_x il vient $\sum \lambda_i \dfrac{1}{x_i - x} = 0$ et finalement les λ_i sont nuls par unicité de la décomposition en éléments simples.
   J est inversible, donc d'après le théorème d'inversion locale Φ est ouverte.
5. On a déjà vu que $(-1)^i(y_{i+1} - y_i) = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} (-1)^i P_x(t)\,dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |P_x(t)|\,dt$.

   La somme S proposée vaut donc $S = \displaystyle\int_0^{x_{n-1}} |P_x(t)|\,dt = \int_0^1 x_{n-1}|P_x(u x_{n-1})|\,du$ (on a posé $t = u.x_{n-1}$).
   Or $P_x(u.x_{n-1})$ est un polynôme de la forme $(x_{n-1})^n R(u)$ avec R polynôme unitaire de degré n. Donc d'après la question **2** on a $S \geqslant C(x_{n-1})^{n+1}$.

6. Ω_1 et Ω_2 sont bien des ouverts connexes puisque ce sont des intersections de demi-espaces vectoriels (donc convexes) ouverts. Soit K_2 un compact de Ω_2. Posons $K_1 = \Phi^{-1}(K_2)$. K_1 est fermé car Φ est continue, et borné en raison de la question précédente puisque $\sup_i |x_i| = x_{n-1}$ est borné si les y_i le sont (rappelons que C est stritement positive).

   Notons maintenant que l'application Φ est également définie sur $\overline{\Omega_1}$. Pour montrer que K_1 est compact il suffit de montrer qu'il est fermé dans $\overline{\Omega_1}$ car un fermé borné est un compact dans $\mathbf{R}^{n-1}$. Soit $X = (x_1,\dots,x_{n-1})$ un point adhérent à K_1. S'il n'est pas dans K_1 alors il existe i tel que $x_i = x_{i+1}$ (ou bien $x_1 = 0$, qui se traite de la même façon). X est la limite d'une suite (X_n) d'éléments de K_1 donc puisque Φ est continue sur $\overline{\Omega_1}$, $\Phi(X)$ est la limite d'une suite de K_2, et par suite $\Phi(X) \in K_2 \subset \Omega_2$. Or manifestement, si $x_i = x_{i+1}$ on a $y_i = y_{i+1}$ ce qui fournit une contradiction.

   Toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer la question **1.** : Φ est surjective.

   Soit alors $(a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1})$ et σ une permutation alternante. Posons $y_i = \sigma(a_i) - \sigma(a_0)$ pour $i = 1..n-1$. Posons $x_0 = 0$. Soit $(x_1,\dots,x_{n-1})$ un antécédent de $(y_1,\dots,y_{n-1})$ par Φ et soit enfin P le polynôme défini par l'égalité :$P(X) = \sigma(a_0) + \int_0^X P_x(t)\,dt$. Alors par construction $P(x_i) = \sigma(a_i)$ et $P'(x_i) = P_x(x_i) = 0$ pour tout i. De plus les zéros de $P' = P_x$ sont simples donc $P''(x_i) \neq 0$. Enfin P étant un polynôme ses limites sont infinies en $\pm\infty$ et vu son coefficient dominant $(-1)^{n-1}X^{n+1}$ il tend vers $+\infty$ en $-\infty$. P est donc bien un élément de $\mathscr{A}_n$.

.

4.3 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et de probabilités

Rapport des correcteurs

Remarques générales

Le problème étudiait les lignes de niveau de fonctions de deux variables réelles. Il était construit en quatre parties relativement indépendantes permettant de balayer une large partie du programme (fonctions d'une variable réelle, équations différentielles, fonctions d'une variable complexe, topologie et calcul différentiel...). Les trois premières parties commençaient par des questions faciles ce qui a permis à tous les candidats, même les plus modestes, de mettre en évidence leurs connaissances.

La première partie d'analyse élémentaire établissait le lemme de Morse en dimension 1 et en donnait une application au système de Lokta Volterra. Elle permettait d'évaluer les candidats sur des notions dont la maîtrise est indispensable pour un enseignant de Terminale. Elle a été traitée de façon convenable par une grande partie d'entre eux. Les trois autres parties ont connu un succès plus mitigé. Un nombre significatif de candidats a abordé les quatres parties. Certains ont fait avec succès le choix de renoncer à la fin (difficile) du **III** et de traiter le **IV** qui était plus abordable. Cependant si quelques très bons candidats ont traité le problème quasiment dans sa totalité, bien trop nombreux sont ceux qui ont été arrêtés dès les premières véritables difficultés.

Le jury a déploré que certaines erreurs élémentaires apparaissent de façon récurrente. Par exemple (ici lors de la question **I.5**) trop de candidats utilisent un argument local pour prouver un résultat qui ne l'est pas ; car le comportement au voisinage de zéro de f ne permet pas à lui seul de justifier les variations de f sur son intervalle de définition. Il est décevant de constater que peu de candidats sont à l'aise avec la signification et l'usage des quantificateurs. Nous avons noté (par exemple au **I.A** et au **I.C**) beaucoup de confusion sur le nombre de variables, l'importance de ce nombre (une ou deux) n'apparaît pas clairement à certains. Et bien des erreurs sont venues de négligences sur le domaine de définition. Nous invitons les candidats à se demander d'abord "Où sont les variables ? Combien sont elles ?". Trop de candidats s'en remettent aux formules automatiques d'égalité d'ensembles (simples jeux d'écritures) ; mieux vaut essayer d'avoir un contrôle géométrique *a priori* (par exemple en faisant un petit dessin). Nous insistons également sur la nécessité de travailler la notion de fonction composée qui n'est pas parfaitement maîtrisée (erreur dans le sens de la composition, dérivation, changement de variables). Signalons que la grande majorité des candidats ne sait pas faire la différence entre une bijection indéfiniment dérivable et un difféomorphisme.

En ce qui concerne les notions et théorème fondamentaux, les connaissances des candidats sont souvent soit imprécises (on invoque le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sans connaître les hypothèses) soit trop formelles (on connaît les hypothèses de ce même théorème mais on se révèle incapable en pratique de dominer la fonction figurant sous le signe intégrale). La notion de fonction holomorphe n'est pas toujours comprise, le théorème de Cauchy-Lipschitz non plus et l'unicité y est souvent une propriété mystérieuse voire magique, ce qui n'empêche pas de l'appliquer dès qu'apparaît une équation différentielle. Quant au théorème d'inversion locale, rares sont ceux qui l'utilisent à bon escient.

Le jury a été étonné de constater l'absence fréquente du graphe de l'ensemble $E_0(f)$ à la question **I.4**. Rappelons que l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve et qu'il est préférable d'en avoir une. Ceux qui ont tenté de traiter cette question sans calculatrice ont eu peu de réussite, fournissant des dessins fantaisistes et ne vérifiant pas la symétrie par rapport à la première bissectrice pourtant établie peu de temps auparavant. Rappelons qu'outre la rigueur et la précision, on attend d'un futur enseignant cohérence et honnêteté. Que penser d'un candidat qui affirme que l'équation $cos z = 0$ n'a pas de solution complexe après avoir mis en évidence une infinité d'entre elles ou d'un autre qui affirme à la question **II.2** que $e_4 = 5$ bien que son étude ne mette en évidence que 4 permutations alternantes ?

Dans l'ensemble les copies sont bien présentées et assez claires mais la rédaction souffre souvent de ses deux maux habituels : étendue à l'infini dans les questions les plus simples, elle se condense et s'obscurcit dès que des justifications non-triviales sont requises. Quelques candidats multiplient les précautions inutiles, et détruisent leurs raisonnements exacts par des clauses absurdes; parfois le choix est laissé au correcteur entre plusieurs réponses incompatibles. Enfin certaines rares copies sont rendues difficilement compréhensibles par une graphie convulsive ou une orthographe naufragée.

Bien entendu, quelques compositions plus que satisfaisantes échappent aux travers dénoncés. De nombreux candidats ont prouvé qu'ils avaient préparé avec soin et sérieux cette épreuve et nous invitons les futurs candidats à voir dans les remarques çi-dessus un encouragement et une aide pour préparer le concours de l'année prochaine.

Remarques sur les questions

I.A : en général bien traitée, même si beaucoup affirment sans démonstration que la courbe est une ellipse (**I-A-3**). La moitié des candidats ne sait pas reconnaître une ellipse par son équation cartésienne non réduite.

I.B :

- I.5.a. L'étude globale d'une fonction a donné lieu à des généralisations étranges de son étude locale.

- I.5.c. Pour beaucoup de candidats, l'existence d'un développement limité à l'ordre k équivaut à la classe C^k ; quant au théorème de dérivation sous le signe intégrale, il est souvent appliqué sans aucune vérification.

- I.5.d. Cette question très discriminante a été la plupart du temps traitée de façon incomplète. (Ici il fallait vérifier plusieurs conditions les unes après les autres.) La définition d'un difféomorphisme a été presque toujours ignorée.

I.C

- I.6. A nouveau la définition d'un difféomorphisme est ignorée. De nombreux candidats identifient (ne voient pas la différence entre ?) h et $(x, y) \mapsto (h(x), h(y))$.

- I.7.a. Les candidats confondent x ou y s'annule avec x et y s'annulent simultanément.

- I.7.b Question peu abordée, et souvent traitée de façon incomplète. En particulier rares sont ceux qui signalent que la racine carrée de g est surjective.

II.

-II.1 c. Question très discriminante correctement traitée par un nombre significatif des candidats. On rencontre souvent des erreurs dans les développements limités.

-II.1.d. Question peu abordée. Les candidats confondent souvent les propriétés $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \to 0$ et évaluent la série en $z = 1$. Il fallait ici évaluer la série en $z \geqslant \frac{\pi}{2}$ pour pouvoir conclure.

-II.2.a. Assez bien traitée dans l'ensemble.

-II.2.b. Si l'idée est souvent comprise, rares sont ceux qui exhibent une bijection correcte entre les deux ensembles de permutations. On voit fréquemment des compositions dans le mauvais sens.

-II.2.c et d. Très peu traitées.

III.

-III.1.2. Bien traitées.

-III.3. Beaucoup de candidats abordent cette question, mais peu la traitent complètement.

-III.5. Trop d'erreurs dans ce dénombrement élémentaire.

La suite de la partie **III** a été peu abordée. Elle a été abordée par des candidats de bon niveau mais ceux ci ont souvent éprouvé de grandes difficultés à formaliser rigoureusement leurs intuitions.

IV.

-IV.1. Cette question a été traitée avec succès par les candidats qui l'ont abordée.

-IV.2. Des confusions entre inf et min. Certains candidats pensent qu'ils suffit d'affirmer que l'intégrale n'est jamais nulle pour conclure.

-IV.3. Bien

La suite de la partie **IV** a été peu abordée, mais parfois traitée brillamment par les excellents candidats.