4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.2.1 Le toboggan d'Abel

Appelons toboggan le graphe d'une fonction f de classe C^1 sur $[0,1]$ qui est strictement décroissante et qui vérifie $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Si $h \in [0,1]$, on notera $\omega(h)$ le temps nécessaire à un point matériel situé initialement sur le toboggan à hauteur h et glissant sans frottement pour atteindre le point $(1,0)$.

Niels Abel a considéré en 1826 le problème de savoir si la donnée de la fonction ω permettait de reconstituer la géométrie du toboggan, c'est à dire la fonction f.

Non seulement Abel a répondu positivement, mais il a de plus trouvé une formule explicite donnant f en fonction de ω : les historiens des mathématiques considèrent qu'il s'agit là de la première apparition d'une équation fonctionnelle en mathématiques. Cette équation fonctionnelle implique la transformation d'Abel qui peut être vue comme une primitivisation d'ordre 1/2. C'est cet opérateur qui est l'objet principal d'étude du problème.

4.2.2 Du toboggan d'Abel à la tomographie

Non seulement la transformation intégrale d'Abel s'est avérée être un outil fondamental pour ce qui s'appelle à présent le calcul différentiel fractionnaire mais surtout elle permet de résoudre des problèmes très concrets dans de nombreux domaines. Citons la sismographie, la biophysique, la mécanique quantique et la tomographie. C'est ce dernier aspect qui a été développé dans ce problème.

La question posée est la suivante : on veut étudier des milieux ou existent des objets sphériques dont les diamètres se distribuent suivant une loi inconnue. On ne peut pas accéder directement à cette loi mais les techniques d'imagerie permettent néammoins de connaître la loi des rayons des coupes planes du milieu. On peut penser à un fromage comportant des trous que l'on ne peut appréhender qu'en regardant des coupes. La loi des rayons des sphères se déduit de la statistique des rayons des cercles des coupes par une variante de la transformée intégrale d'Abel : ceci est l'objet de la partie III.

4.2.3 Problèmes bien et mal posés

Le problème est que l'on ne connait les lois des coupes qu'approximativement alors que le problème mathématique sous-jacent est mal posé. On sait que pour remédier à cela il faut "régulariser", et dans le cas présent cette régularisation consiste à remplacer les coupes par des tranches. L'intuition est ici, pour rester dans la métaphore culinaire plutôt celle de la salade de tomates : comment reconstituer la loi des rayons des tomates à partir de la loi des diamètres des tranches qui constituent la salade ? On montre (et c'est l'objet de la fin de la partie III) que ce problème est maintenant bien posé et l'objet de la partie IV est de montrer que sa solution converge vers la solution du problème mal posé lorsque l'épaisseur des tranches tend vers 0.

4.2.4 Rapport sur l'épreuve

La première partie traitait de la transformée d'Abel dans $C^0([0,1])$ et $C^1([0,1])$. Les questions étaient de nature très classiques ; on y testait les connaissances de base sur les questions de régularité des intégrales à paramètres. Force est de constater que la notion d'absolue convergence n'est pas assimilée par nombre de candidats : on rappelle que pour montrer qu'une intégrale converge absolument il convient de majorer la valeur absolue de la fonction qu'on intègre par une fonction intégrable (et non la valeur absolue de l'intégrale dont on ne sait pas qu'elle converge). La section traitant de la formule

d'inversion nécessitait l'usage du théorème de Fubini qui est également très mal appliqué. Beaucoup de candidats ne vérifient pas l'absolue convergence de l'intégrale double ou bien se trompent dans les bornes d'intégration (on intégrait sur un domaine triangulaire et non rectangulaire). A noter aussi dans cette partie la confusion fréquente entre la continuité de Af et celle de l'opérateur A : en particulier l'inégalité $\|Af\|_\infty \leqslant M\|f\|_\infty$ n'implique nullement que la fonction Af est continue. Enfin l'injectivité de l'opérateur V a causé du souci à de nombreux candidats qui s'empêtrent dans des preuves alambiquées alors qu'il suffisait de remarquer que $f = -(Vf)'$.

La partie II testait les connaissances des candidats sur les espaces L^p : très peu d'entre eux ont répondu correctement à la première question où une indication était pourtant donnée. La question liée au théorème d'Ascoli a été très peu abordée.

La partie III testait des connaissances basiques de probabilité. La notion de loi de couples de variables aléatoires est très floue pour beaucoup de candidats.

La partie IV a été abordée par une toute petite minorité de candidats.

Enfin, notons que l'introduction comportait deux petites coquilles qui heureusement n'ont pas eu d'influence sur la compréhension du texte et dans les copies. Il fallait évidemment définir les espaces L^p comme espaces de (classes de) fonctions à valeurs complexes, de façon à ce que l'espace $C([0,1])$ qui était défini sur les complexes soit dense dans les L^p. Par ailleurs les espaces L^p étaient définis sur un intervalle I quelconque tandis que la norme n'était définie que dans le cas $I = [0,1]$. Les candidats ont corrigé d'eux mêmes.

4.3 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.3.1 La transformation intégrale d'Abel

Transformée d'Abel dans $C^0([0,1])$ et dans $C^1([0,1])$

1. (a) Si $x \in [0,1[$ et $1-x > \epsilon > 0$ alors

$$\int_{x+\epsilon}^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}} = 2(\sqrt{1-x} - \sqrt{\epsilon}) \to 2\sqrt{1-x}$$

si ϵ tend vers 0. L'intégrale est donc convergente et vaut $2\sqrt{1-x}$.

(b) Comme

$$\frac{|f(t)|}{\sqrt{t-x}} \leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{\sqrt{t-x}},$$

l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$$

est absolument convergente, donc convergente. De plus

$$|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt| \leqslant 2\|f\|_\infty \sqrt{1-x} \to 0, \text{ quand } x \to 1.$$

2. On effectue le changement de variable $t = (1-u)x + u = x + u(1-x)$:

$$Af(x) = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u(1-x)}}(1-x)du = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}} du.$$

3. Posons
$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}} du,$$
de sorte que $Af(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x}$.
Comme $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $[0,1]$, il suffit de montrer que φ l'est aussi. Mais $\varphi(x) = \int_0^1 F(u,x)du$ où
$$F(u,x) = \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}.$$
Soit alors $x \in [0,1]$ et (x_n) une suite de points de $[0,1]$ convergeant vers x. Alors $F(u,x_n) \to F(u,x)$ pour tout $u \in]0,1]$.De plus,
$$|F(u,x_n)| \leqslant g(u) = \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{u}}$$
où g est une fonction de $L^1([0,1])$. Le théorème de convergence dominée s'applique et prouve que $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ et donc que φ est continue sur $[0,1]$.
On peut aussi pour prouver le résultat invoquer le thórème général (dont le raisonnement précédent ramène la preuve au théorème de convergence dominée) :
Si la fonction $x \mapsto F(u,x)$ est continue pour presque tout $u \in [0,1]$ et si $|F(u,x)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{u}}$ qui est une fonction intégrable, alors la fonction φ est continue sur $[0,1]$.
Passons à la continuité de A. On peut écrire
$$|Af(x)| \leqslant \|f\|_\infty 2\sqrt{1-x} \leqslant 2\|f\|_\infty,$$
ce qui prouve que $\|A\| \leqslant 2$, et la considération de la fonction constante 1 implique $\|A\| = 2$.

4. (a) On rappelle que $Af(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x}$ où φ est continue sur $[0,1]$ avec $\varphi(1) = 2f(1)$: dans le cas où $f(1) = 0$ on en conclut que $Af(x) \sim 2f(1)\sqrt{1-x}$ au voisinage de 1.
   (b) Comme $Af(1) = 0$ on peut écrire
$$|\frac{Af(x)-Af(1)}{x-1}| = |\frac{Af(x)}{x-1}| \sim_{x\to 1} |\frac{-2f(1)}{\sqrt{1-x}|} \to +\infty$$
   quand $x \to 1$.

5. (a) On reprend les notations de IA5 : il suffit de montrer que φ est de classe C^1 sur $[0,1]$. Soit donc comme plus haut $x \in [0,1]$ et $x_n \in [0,1]$ une suite convergeant vers x. Alors
$$\frac{\varphi(x_n)-\varphi(x)}{x_n - x} = \int_0^1 H_n(u)du$$
   où
$$H_n(u) = \frac{f(u+x_n(1-u)) - f(u+x(1-u))}{(x_n-x)\sqrt{u}} \to \frac{(1-u)f'(u+x(1-u))}{\sqrt{u}},\ u \in]0,1[.$$
   Par ailleurs, par le théorème des accroissements finis,
$$|H_n(u)| \leqslant \frac{(1-u)\|f'\|_\infty}{\sqrt{u}} = H(u),$$
   où $H \in L^1([0,1])$. Le théorème de convergence dominée s'applique et nous permet d'affirmer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et que
$$\varphi'(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)f'(u+x(1-u))}{\sqrt{u}} du.$$

On montre alors comme dans IA5 que φ' est continue sur $[0,1]$; on en déduit immédiatement que Af est de classe C^1 sur $[0,1[$.
Comme plus haut, on peut aussi invoquer pour cette question un théorème général :
Si la fonction $x \mapsto F(u,x)$ est de classe C^1 pour presque tout $u \in [0,1]$ et si

$$|\frac{\partial F}{\partial x}(u,x)| \leqslant H(u)$$

avec $H \in L^1$, alors la fonction φ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe $\int$.

(b) Par dérivation du produit donnant Af, pour $x \in [0,1[$,

$$(Af)'(x) = \sqrt{1-x}\varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{1-x}}.$$

La fonction φ' étant continue sur $[0,1]$, le premier terme de cette somme tend vers 0 en 1 ; par ailleurs on observe tout d'abord que $f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(1) = 0$, et donc que

$$\frac{\varphi(x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{2\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{1-x} \to 0 \text{ quand } x \to 1,$$

car φ est dérivable en 1.
On en déduit que $(Af)'(x) \to 0$ quand $x \to 1$ et puis que Af est de classe C^1 sur $[0,1]$.C'est en effet une simple application du théorème des accroissements finis que de dire que Af est dérivable en 1 avec dérivée nulle, comme conséquence du fait que la dérivée $Af'(x)$ converge vers 0 quand $x \to 1$.

La formule d'inversion

1. On fait le changement de variable $t = (1-u)a + ub$:

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{(b-a)du}{\sqrt{(1-u)(b-a)u(b-a)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

On observe ensuite que

$$u(1-u) = u - u^2 = \frac{1}{4} - (u - \frac{1}{2})^2$$

et on fait le changement de variable $v = 2(u - \frac{1}{2})$, ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \int_{-1}^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \pi,$$

comme on le voit en faisant le dernier changement de variable $v = \sin\theta$.

2. L'application V envoie $C^0([0,1])$ dans $C^1([0,1]) \subset C^0([0,1])$ et

$$\forall x \in [0,1],\ |Vf(x)| \leqslant \|f\|_\infty,$$

ce qui prouve que $\|V\| \leqslant 1$ et la considération de la fonction constante 1 montre que $\|V\| = 2$.

3. Soit $f \in C^0([0,1])$ et $x \in [0,1[$:

$$A(Af)(x) = \int_x^1 \frac{Af(t)dt}{\sqrt{t-x}}$$

$$= \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t-x}} \left(\int_x^1 \frac{1_{[t,1]}(u)f(u)du}{\sqrt{u-t}} \right) dt.$$

La fonction

$$(t,u) \mapsto \frac{1_{[t,1]}(u)|f(u)|du}{\sqrt{(t-x)(u-t)}}$$

est intégrable sur $[x,1]\times[x,1]$ car

$$\int_x^1\int_x^1 \frac{1_{[t,1]}(u)|f(u)|du}{\sqrt{(t-x)(u-t)}}dtdu \leqslant \|f\|_\infty \int_x^1 du\left(\int_x^u \frac{dt}{\sqrt{(t-x)(u-t)}}\right) \leqslant \pi\|f\|_\infty(1-x).$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$A\circ Af(x) = \int_x^1 f(u)\left(\int_x^u \frac{dt}{\sqrt{(t-x)(u-t)}}\right)du = \pi Vf(x).$$

4. $Af=0 \Rightarrow A\circ Af = 0 \Rightarrow Vf=0$, mais $f=-(Vf)'=0$.
5. (a) $\mathrm{Im}V = \{f\in C^0([0,1]);\ f(1)=0\}$. L'inclusion $\subset$ est évidente ; pour l'inclusion inverse on observe que si $g\in C^1([0,1])$ et $g(1)=0$, alors $g=-Vg'$.
   (b) 1) Si $h\in \mathrm{Im}A$ alors $h=Af$ et donc $Ah=\pi Vf\in C^1([0,1])$ et $h\in A^{-1}(C^1([0,1]))$.
   2) Si $Ah\in C^1([0,1])$ alors, comme $Ah(1)=0$, $Ah=V(-(Ah)')=A(\pi A(-Ah)'$ et donc, par l'injectivité de A,
   $$h = A(-\pi(Ah)')\in \mathrm{Im}A.$$
   (c) Si $g\in C^1([0,1])$ et $g(1)=0$ alors $g=-V(g')=A(-\frac{1}{\pi}A(g'))\in\mathrm{Im}A$.
6. On suppose que $g=Af$: alors $Ag=\pi Vf$ et donc $f=-1/\pi(Ag)'$.

Un semi-groupe d'opérateurs

1. Sur $[x,1]$ on a $|(t-x)^{\alpha-1}f(x)|\leqslant \|f\|_\infty(t-x)^{\alpha-1}$ et $\int_x^1(t-x)^{\alpha-1}dx$ converge par le critère de Riemann. $V^\alpha f(x)$ est donc bien défini et, par le même changement de variable qu'au IA4) on obtient
$$V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(1-x)^\alpha\int_0^1 u^{\alpha-1}f(x+(1-x)u)du$$
et on montre comme dans IA4) que $V^\alpha f$ est continue.
En ce qui concerne l'application linéaire V^α, sa continuité découle de
$$\|V^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|f\|_\infty\int_0^1 u^{\alpha-1}du = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|f\|_\infty.$$
On peut remarquer (non demandé) que la considération de la fonction constante 1 conduit à montrer que
$$\|V^\alpha\| = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}.$$
2. $V^\alpha V^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1 V^\beta f(t)(t-x)^{\alpha-1}dt$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_x^1(t-x)^{\alpha-1}\left(\int_x^1(u-t)^{\beta-1}1_{[t,1]}(u)f(u)du\right)dt.$$
On montre comme plus haut que le théoréme de Fubini s'applique et que
$$V^\alpha V^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_x^1 f(u)\left(\int_x^u(t-x)^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}dt\right)du.$$

On effectue alors le changement de variable $t = (1-s)x + xs$ dans $\int_x^u$ que l'on désigne par I :

$$I = (u-x)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds.$$

On applique alors le résultat rappelé dans l'introduction :

$$I = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(u-x)^{\alpha+\beta-1}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} V^\alpha V^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_x^1 f(u)(u-x)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= V^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

3. Notons $V^{(n)} = V \circ V ... \circ V$ (n fois) et montrons par récurrence que $V^{(n)} = V^n$. C'est vrai pour $n = 1$. Si la propriété est vraie au rang n alors, par la question précédente, $V^{n+1} = V \circ V^n = V \circ V^{(n)} = V^{(n+1)}$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Enfin
$$V^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_x^1 \frac{f(t)dt}{\sqrt{t-x}} = \frac{1}{\Gamma(1/2)} Af(x).$$
4. En utilisant le résultat admis dans l'introduction, on en déduit que
$$Af(x) = \sqrt{\pi} V^{1/2} f(x).$$

4.3.2 La transformée d'Abel et les espaces L^p

1. (a) On considère l'espace de probabilité $(\mathbf{R}, |h(x-t)|dt)$. L'inégalité de Hölder permet de montrer que les normes L^p sur cet espace sont croissantes. On a donc, si f est mesurable,
$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)||h(x-t)|dt \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^p |h(x-t)|dt \right)^{1/p},$$
d'où l'on déduit l'inégalité demandée.

   (b) Pour le reste de la question on suppose tout d'abord $g \neq 0$ sans quoi il n'y a rien à démontrer, puis on pose $h = g/\|g\|_1$. Supposons d'abord $f, h \geqslant 0$: alors $f * h$ a un sens (fini ou infini) et l'inégalité que l'on vient de démontrer permet d'écrire
$$\begin{aligned} \int |f*h|^p dx &\leqslant \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(t)|^p |h(x-t)| dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} |h(x-t)| \left(\int_{\mathbf{R}} f(t)^p dt \right) dx = \|f\|_p^p, \end{aligned}$$
et l'on obtient l'inégalité désirée en remplaąnt dans le membre de gauche h par $g/\|g\|_1$. Le cas général (sans hypothèse de signe) est alors une conséquence du théorème de Fubini.
2. Par définition du produit de convolution, $E(f) * r(x) = \int_{\mathbf{R}} E(f)(t) r(x-t) dt$. Le support de la fonction $E(f)$ est inclus dans $[0,1]$, et celui de la fonction $t \mapsto r(x-t)$ est inclus dans $[x, 1+x]$. On voit donc que si $x \in [0,1]$ alors
$$E(f) * r(x) = \int_x^1 \frac{f(t)dt}{\sqrt{t-x}} = Af(x)$$
dans le cas où f est continue.

3. ((a) et(b))On déduit de la question précédente que l'expression qui définit Af lorsque f est continue garde un sens (pp) lorsque $f \in L^p([0,1])$ et que de plus l'application linéaire A ainsi définie est un opérateur de L^p. Comme $C^0([0,1])$ est dense dans L^p, cet opérateur est bien l'unique prolongement continu de A à L^p. Le cas de V est similaire ; tout d'abord l'expression de Vf garde un sens pour $f \in L^p$ car $L^p([0,1]) \subset L^1([0,1])$. Ensuite $\|Vf\|_p \leqslant \|Vf\|_\infty \leqslant \|f\|_p$ par l'inégalité de Hölder.
4. (a) Soit $f \in L^p([0,1])$ telle que $Vf = 0$: alors
$$\forall x < y \in [0,1], \int_x^y f = 0$$
et $\int_I (E(f)(x)dx = 0$ pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$. Mais alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $E(f) * \varphi_\epsilon(x) = 1/\epsilon \int_{[x-\epsilon/2, x+\epsilon/2]} E(f)(t)dt = 0$.
   (b) Par ailleurs (φ_ϵ) est une identité approchée et donc $E(f) * \varphi_\epsilon \to E(f)$ dans L^1 quand $\epsilon \to 0$. On en déduit que $E(f) = 0$. L'opérateur V est donc injectif et l'identité $A \circ A = \pi V$ implique que A l'est aussi.
   (c) La même identité prouve que si A était surjective, V le serait aussi, or V ne peut l'être car $\mathrm{Im} V \subset C^0([0,1])$. Ce dernier point est une conséquence du théor
'eme de convergence dominée : soit en effet $x \in [0,1]$ et (x_n) une suite de cet intervalle convergeant vers x : alors $|Vf(x) - Vf(x_n)| = \int_0^1 1_{[x,x_n]} f(x)dx$ et on a immédiatement, en posant $f_n(x) = 1_{[x,x_n]} f(x)$, que $f_n \to 0$ p.p. et $|f_n| \leqslant |f| \in L^1$.
5. (a) On a $r \in L^q(\mathbf{R})$ car $q < 2$; c'est une application immédiate du critère de Riemann pour les intégrales généralisées sur $\mathbf{R}$ en 0.
   (b) Rappelons le principe de Banach : Si (T_n) est une suite d'applications linéaires continues de l'espace normé E dans l'espace normé F telle que $\exists M \geqslant 1$; $\forall n \|T_n\| \leqslant M$ et telle que $T_n f \to 0$ quand $n \to \infty$ pour $f \in D$, une partie dense de E, alors $T_n f \to 0$ pour tout $f \in E$. Donnons une démonstration de ce principe que nous allons utiliser à plusieurs reprises dans la suite. Soit donc $f \in E$ et $\epsilon > 0$: on veut montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \|T_n f\| \leqslant \epsilon$; on commence par utiliser la densité de D : il existe $g \in D$ tel que $\|f - g\| < \frac{\epsilon}{2M}$. On fixe alors cet élément g et on utilise l'hypothèse : il existe n_0 tel que $\|T_n g\| \leqslant \epsilon/2$ pour $n \geqslant n_0$. Si maintenant $n \geqslant n_0$ on écrit
$$\|T_n f\| \leqslant \|T_n(f-g)\| + \|T_n g\| \leqslant \epsilon,$$
ce qu'il fallait démontrer.
On considère alors $x \in [0,1]$ et une suite (x_n) de points de $[0,1]$ convergeant vers x : On applique le principe de Banach à $E = L^q = F$ et $T_n(f) = \tau_{x_n}(f) - \tau_x(f)$. Il est clair que $\|T_n\| \leqslant 2$. Montrons que $T_n(f) \to 0$ si f est continue à support compact. Soit $[a,b]$ un intervalle en dehors duquel $\tau_x f$ est nulle. Pour n assez grand toutes les fonctions $\tau_{x_n} f$ ont leur support inclus dans $[a-1, b+1]$. Par ailleurs la fonction $\tau_x f$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ et donc $\tau_{x_n} f$ converge uniformément vers $\tau_x f$ sur $[a-1, b+1]$; on en déduit que
$$\|T_n(f)\|_1 \leqslant (b-a+2)\|T_n(f)\|_\infty \to 0$$
quand n tend vers $+\infty$. L'espace des fonctions continues à support compact étant dense dans L^p, le principe de Banach permet de conclure.
   (c) On peut écrire $Af(x) = \int_0^1 f(t)\tau_x r(t)dt$ et donc, x, y étant deux réels de $[0,1]$,
$$|Af(x) - Af(y)| = |\int_0^1 f(t)(\tau_x r(t) - \tau_y r(t))dt| \leqslant \|f|_p \|\tau_x r - \tau_y r\|_q \to 0,\ y \to x$$
par la question précédente. L'opérateur A envoie donc L^p dans C^0 et une nouvelle application de Hölder donne
$$\forall f \in L^p([0,1]),\ \|Af\|_\infty \leqslant \|r\|_q \|f\|_p.$$

(d) Le théorème d'Ascoli nous dit que pour montrer que $A(B_p)$ est d'adhérence compacte, il suffit de montrer que c'est une partie bornée et équicontinue de C^0. Le fait que c'est une partie bornée se déduit du fait que si $f \in B_p$ alors $\|Af\|_\infty \leqslant \|r\|_q$. L'équicontinuité découle de l'inégalité

$$|Af(x) - Af(y)| \leqslant \|\tau_x r - \tau_y r\|_q$$

vraie pour $f \in B_p$ et de la continuité de l'application $x \mapsto \tau_x r$ de $[0,1]$ dans L^q.

6. (a) On peut écrire $\int f_\lambda(t)^2 dt = -\int u' u^{-\lambda}$ où $u(t) = \ln(1/t)$. La primitive de $u'u^{-\lambda}$ est

$$u^{1-\lambda}/(1-\lambda)$$

(ou bien $\ln\ln u$ si $\lambda = 1$) : il y a donc convergence (en 0, la seule singularité) si et seulement si $\lambda > 1$.

(b) On applique le lemme de Fatou :

$$\liminf_{x\to 0} \int_x^{1/2} \frac{t^{-1/2}(\ln\frac{1}{t})^{-\lambda/2}}{\sqrt{t-x}} dt \geqslant \int_0^{1/2} \frac{dt}{t(\ln\frac{1}{t})^{\lambda/2}} = +\infty$$

si $\lambda < 2$.

(c) Il suffit de prendre f_λ avec $1 < \lambda < 2$.

7. (a) On écrit pour $x \in [0,1]$,$|V^n f(x)| = |V^{n-1} V f(x)| \leqslant \frac{\|Vf\|_\infty}{(n-2)!} \frac{(1-x)^{n-1}}{n-1}$ et donc $\|V^n f\|_1 \leqslant \frac{\|f\|_1}{n!}$. On en déduit que $\|V^n\|^{1/n} \leqslant n!^{-1/n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini car

$$n!^{1/n} = \exp(\frac{\ln 1 + .. + \ln n}{n}) \to \infty$$

par le théorème classique sur les moyennes de Cesaro.

(b) $\|A^{2n}\|^{1/2n} = \sqrt{\pi \|V^n\|^{1/n}} \to 0$ et $\|A^{2n+1}\|^{1/(2n+1)} \leqslant \|A\|^{1/(2n+1)} \left(\pi \|V^n\|^{1/n}\right)^{n/(2n+1)} \to 0$.

8. Pour t assez grand,

$$(tI + A)^{-1} = \frac{1}{t}(I + \frac{A}{t})^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-A)^n}{t^{n+1}}.$$

Mais d'après ce qui précède, le rayon de convergence de la série est infini ; l'écriture précédente est donc valable pour tout $t > 0$.

4.3.3 Sphères aléatoires

1. Les deux lois étant indépendantes, la loi du couple est la mesure de densité

$$f(r)drdh$$

sur $[0,1] \times [0,1]$.

2. $P(X = 0) = P(H \geqslant R) = \int_0^1 (1-r) f(r) dr$.
3. $P(X > x) = P(H^2 < R^2 - x^2) = \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} f(r) dr$.
4. On pose $\theta(x) = \sqrt{x}$: c'est un homéomorphisme de $[0,1]$ sur lui-même dont la restriction à $]0,1[$ est un difféomorphisme. Alors $V_\theta : f \mapsto f \circ \theta\theta'$ est un isomorphisme isométrique de $L^1([0,1])$ comme on le voit par la formule du changement de variable et par le fait que $V_\theta^{-1} = V_{\theta^{-1}}$.
5. (a) On effectue le changement de variable $v = r^2 = \theta^{-1}(r)$ dans l'intégrale ; cela donne

$$\begin{aligned}\psi(u) &= u \int_{u^2}^1 \frac{\tilde{f}(v)dv}{\sqrt{v-u^2}} \\ &= \frac{1}{2} A\tilde{f}(\theta^{-1}(u))(\theta^{-1})'(u),\end{aligned}$$

qui est bien une fonction de L^1 par la formule du changement de variable et le fait que $A\tilde{f} \in L^1$ par la question précédente et les résultats de la partie II.

(b) L'égalité admise découle du fait que

$$\sqrt{r^2-x^2} = -\int_x^r \frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{r^2-u^2})du = \int_x^r \frac{u}{\sqrt{r^2-u^2}}du.$$

En remplaçant dans l'expression plus haut on obtient

$$P(X>x) = \int_x^1 \left(\int_x^1 \frac{u1_{[x,r]}(u)du}{\sqrt{r^2-u^2}}\right) f(r)dr.$$

Par le théorème de Fubini on peut intervertir, ce qui donne le résultat demandé.

(c) On en déduit que pour tout intervalle I de $]0,1]$, $P(X\in I) = \int_I \varphi$ et donc que pour tout intervalle $I\subset[0,1]$ on a $P(X\in I) = P_X(I)$.

6. On a montré dans III.5.a que

$$\psi = \frac{1}{2}V_{\theta^{-1}}(A\tilde{f}).$$

Le résultat demandé s'obtient alors en prenant l'image par V_θ des deux membres.

7. On fait agir A sur les deux membres de l'égalité du III.6 :

$$2A\tilde{\psi} = A\circ A\tilde{f} = \pi V\tilde{f},$$

et l'on conclut par le changement de variable $x\mapsto x^2$.

8. Le calcul est tout à fait similaire au précédent : on remarque simplement que $X=0$ si $H\geqslant R+\epsilon$ et que $X=R$ si $h\leqslant\epsilon$. On peut alors écrire, si $x\in]0,1]$,

$$P(X>x) = P(X>x, H\leqslant\epsilon) + P(X>x, H>\epsilon) = P(R>x)P(H\leqslant\epsilon) + P(X>x, H>\epsilon)$$

$$= (I) + (II).$$

En utilisant l'indépendance de R et H on obtient

$$(I) = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\int_x^1 f(r)dr.$$

Afin de calculer (II) on observe tout d'abord que si $H>\epsilon$ alors X est donné par le rayon d'un cercle intersection de la sphère avec un plan à distance $H-\epsilon$ du centre. On a donc

$$(II) = P(\epsilon < H < \sqrt{R^2-x^2}+\epsilon) = \frac{1}{1+\epsilon}\int_x^1 (r^2-x^2)f(r)dr.$$

On conclut alors successivement :

$$(1+\epsilon)\int_x^1 \Phi(u)du = \epsilon\int_x^1 f(r)dr + \int_x^1 \psi(u)du,$$

$$(1+\epsilon)\Phi = \epsilon f + \psi,$$

$$(1+\epsilon)\tilde{\Phi} = \epsilon\tilde{f} + \tilde{\psi},$$

$$(1+\epsilon)\tilde{\Phi} = \epsilon\tilde{f} + \frac{1}{2}A\tilde{f},$$

ce qui constitue le résultat demandé.

4.3.4 Problèmes bien et mal posés

1. ((a)et (b)) : Si le problème $Af = g$ était bien posé on aurait l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in L^1$, $\|Af\| \geqslant c\|f\|$. Mais alors A serait d'image fermée, et donc serait surjectif car il est aussi d'image dense , ce que l'on a vu être faux. Par contre on a vu que pour tout $t > 0$ $tI + A$ est un isomorphisme ; le problème $(tI + A)f = g$ est donc bien posé.
2. (a) On part de l'équation
$$tf_{t,V} + Vf_{t,V} = Vh.$$
On sait que $f_{t,V} \in L^1$, ainsi que h. On a donc $Vf_{t,V}, Vh \in C^0$ et donc a fortiori $f_{t,V} \in C^0$ aussi et donc $y = Vf_{t,V} \in C^1$.
Mais alors , comme $y(1) = 0$, on a $y = -Vy'$ et $f_{t,V} = -y'$, ce qui prouve que Vf_s est solution de
$$y' - \frac{y}{t} = -\frac{Vh}{t}. \tag{4.4}$$
(b) De (4.4)on déduit que
$$f_s = -y' = \frac{Vh}{s} - \frac{1}{s^2}\int_x^1 e^{\frac{x-u}{s}} Vh(u)du.$$
Par une intégration par parties on obtient alors :
$$\begin{aligned} -y' &= \frac{Vh}{s} - \frac{1}{s}\int_x^1 (1 - e^{\frac{x-u}{s}})h(u)du \\ &= \frac{1}{s}\int_x^1 e^{\frac{x-u}{s}} h(u)du = E(h) * \psi_s(u). \end{aligned}$$
3. (a) $\|(sI + V)^{-1}Vh\| = \|h * \psi_s\| \leqslant \|h\|$.
(b) $(sI + V)^{-1}V = I - s(sI + V)^{-1}V$ et donc $\|s(sI + V)^{-1}V = \| = \|I - sI + V)^{-1}V\| \leqslant 2$.
(c) - première méthode : (ψ_s), $s > 0$ est une approximation de l'identité.
- deuxième méthode : On applique le principe de Banach à $T_t = (tI + V)^{-1}V - I$. Cette famille est uniformément bornée par ce que l'on vient de voir. D'autre part soit $D = V(L^1)$: c'est un sous espace dense de L^1 car il contient les fonctions de classe C^1 nulles en 1. Si $h = Vk \in D$ alors
$$\|T_t h\| = \| - t(tI + V)^{-1}Vk\| \leqslant Ct\|k\| \to 0$$
quand $t \to 0$.
4. On intègre la fonction $z \mapsto \frac{z^\alpha}{(z+t^2)(z+x)}$ sur le chemin qui va de ϵ à R le long de l'axe réel prolongé par le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens trigonométrique, continué par le chemin le long de l'axe réel de R à ϵ et terminé par le cercle de centre 0 et de rayon ϵ parcouru une fois dans le sens des aiguilles d'une montre. En faisant tendre ϵ vers 0 et R vers ∞ on obtient
$$\begin{aligned} \frac{(1 - e^{2i\pi\alpha})}{2i\pi}\int_0^\infty \frac{s^\alpha ds}{(s + t^2)(s + x)} &= \frac{(-t^2)^\alpha}{x - t^2} + \frac{(-x)^\alpha}{t^2 - x} \\ &= e^{i\pi\alpha}\frac{x^\alpha - t^{2\alpha}}{t^2 - x} \end{aligned}$$
d'où le résultat découle.
5. Par la formule du 4),
$$|(tI + \frac{A}{\pi})^{-1}\| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}(s + t^2)}.$$
On fait le changement de variable $s = t^2u$ dans la dernière intégrale :
$$\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}(s + t^2)} = \frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}(1 + u)} = C/t.$$

6. Par la question précédente et la formule

$$t(tI + A)^{-1} + (tI + A)^{-1}A = I$$

on voit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|(tI + A)^{-1}A\| \leqslant C$. Maintenant

$$f_t - h = (tI + A)^{-1}Ah - h = -t(tI + A)^{-1}h$$

et si de plus $h \in \mathrm{Im}A$, soit $h = Ak$, alors

$$\|f_t - h\| \leqslant t\|(tI + A)^{-1}A\|\|k\| \leqslant Ct\|k\| \to 0$$

avec t.

7. On conclut avec le principe de Banach : Soit $T_t = -t(tI + A)^{-1}$ de sorte que $f_t - h = T_t h$. On a montré que $\|T_t\| \leqslant C$ et que

$$T_t h \to 0$$

si $h \in \mathrm{Im}A$ qui est dense dans $L^1([0, 1])$; par le principe de Banach $T_t h \to 0$ pour tout $h \in L^1([0, 1])$.

4.3.5 Annexes

Annexe 1

Le résultat démontré dans la partie IV tombe en défaut pour $t < 0$. Plus précisément soit pour $t > 0$, f_t la solution de

$$(A - tI)f_t = g,$$

où $g = Ah$, $h \in L^1$. S'il était vrai que $f_t \to h$ dans L^1 pour tout $h \in L^1$, alors le théorème de Banach-Steinhaus impliquerait qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall t > 0,\ \|(A - tI)^{-1}A\| \leqslant M. \tag{4.5}$$

Mais alors il existerait une autre constante $M' > 0$ telle que

$$\forall t > 0,\ \|(V - tI)^{-1}V\| \leqslant M',$$

comme on le voit en écrivant l'identité

$$(V - tI)^{-1}V = (A - \sqrt{t}I)^{-1}A(A + \sqrt{t}I)^{-1}A.$$

Montrons que l'inégalité (4.5) n'est pas possible : un calcul en tous points analogues à celui fait plus haut montre que

$$f_t(x) = \frac{1}{t}\int_x^1 e^{\frac{u-x}{t}}h(u)du.$$

Considérons alors le cas particulier où h est identiquement égale à 1. Dans ce cas tout est explicite, et en particulier

$$f_t(x) = e^{\frac{1-x}{t}} - 1,$$

et $\|f_t\|_1 = te^{1/t} - t - 1 \to \infty$, $t \to 0$. on en déduit que

$$\|(A - tI)^{-1}A\| \to \infty$$

quand $t \to 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

Annexe 2

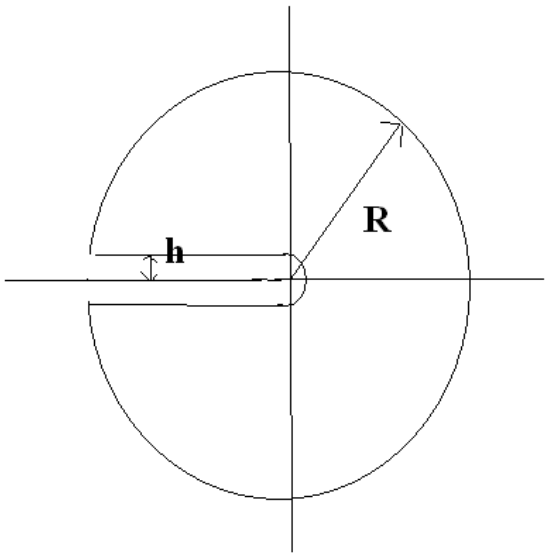
Nous indiquons ici brièvement comment démontrer le résultat admis sur le calcul fonctionnel holomorphe.
Soit $\alpha > 0$, $T = V + \alpha I$, F une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, et $R > 0$, $0 < h < \alpha$. On peut alors définir

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{h,R}} f(z)(zI - T)^{-1}dz$$

et l'on montre (c'est le calcul fonctionnel holomorphe) que

$$f(T) \circ g(T) = fg(T)$$

si g est une autre fonction holomorphe dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Dans cet énoncé, le lacet $\gamma_{h,R}$ est donné par la figure suivante :



le résultat provient alors de l'écriture de $f(T)$ avec

$$f(z) = \frac{1}{t + \sqrt{z}}$$

suivi de trois passages à la limite, successivement

$$h \to 0,\ R \to \infty,\ \alpha \to 0.$$

Annexe 3

Dans la partie III l'équation est un peu différente mais le résultat est le même :

$$(tI + A)f_t = (1 + t)Ah.$$

Mais alors

$$f_t = (1 + t)(tI + A)^{-1}Ah$$

qui converge aussi bien vers h lorsque $h \to 0$.