

4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.2.1 Matrices aléatoires

La théorie des matrices aléatoires étudie les propriétés probabilistes des matrices dont la taille tend vers $+\infty$ et dont les coefficients suivent la même loi tout en étant mutuellement indépendants. Voici quelques moments importants de cette théorie :

- Le statisticien Whishart effectue dans les années 1930 l'analyse probabiliste de matrices du type $\sum_{i=1}^r V_i {}^t V_i$ avec $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, V_i une matrice colonne à n lignes dont les coefficients sont réels et suivent une loi gaussienne.
- Le fameux physicien Eugène Wigner (Prix Nobel 1963 et auteur du célèbre article : « la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles ») a constaté dans les années 1950 que les énergies des résonances de la diffusion des neutrons sur des noyaux lourds ont les mêmes propriétés statistiques que les valeurs propres d'un ensemble de matrices aléatoires (matrices aléatoires symétriques dont les coefficients suivent une loi gaussienne) [dont la taille tend vers $+\infty$ comme le nombre de neutrons]. Ce résultat fondamental a relancé la théorie des matrices aléatoires.
- Le mathématicien H.L. Montgomery et le physicien F.J. Dyson observent dans les années 1980 que la distribution des écarts (convenablement renormalisés) des zéros consécutifs de la célèbre fonction zêta ($\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ prolongée à $\mathbf{C} \setminus \{1\}$) est la même que la distribution des écarts (convenablement renormalisés) des valeurs propres consécutives des matrices hermitiennes dont les parties réelles et parties imaginaires des coefficients suivent une loi gaussienne.
- Le mathématicien D.V. Voiculescu établit dans les années 1990 des liens importants entre la théorie des algèbres d'opérateurs et la théorie des matrices aléatoires via la théorie des probabilités libres.
- Depuis les années 1990, les matrices aléatoires (rectangulaires) sont utilisées massivement dans les télécommunications modernes via les grands systèmes de communication sans fil multi-antennes (réseaux GSM (p antennes émettrices et q antennes réceptrices engendrent des matrices aléatoires de taille $p \times q$), etc).

4.2.2 Loi du demi-cercle et localisation spectrale

Le sujet aborde le cas des matrices aléatoires hermitiennes (dont les parties réelles et imaginaires des coefficients suivent la même loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et sont mutuellement indépendants) et établit dans ce contexte deux résultats importants :

- La loi du demi-cercle obtenue initialement par Eugène Wigner et que l'on peut interpréter comme suit : Si $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ est une matrice aléatoire alors, en moyenne et lorsque n devient très grand, la proportion de valeurs propres de M situées dans l'intervalle $[a\sqrt{n}, b\sqrt{n}]$ vaut approximativement $\frac{1}{\pi} \int_{[a,b] \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} \sqrt{2-t^2} dt$.

Ce résultat s'étend à de grandes classes de matrices aléatoires : les matrices symétriques réelles, les matrices unitaires complexes, etc. En outre, dans la théorie des probabilités libres elle joue un rôle analogue au théorème central limite des variables aléatoires réelles.

- La localisation des valeurs propres des matrices hermitiennes : Si $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ est une matrice aléatoire alors pour tout entier m , la probabilité que M possède m valeurs propres dans

l'intervalle $\left[\frac{a}{\sqrt{2n}}, \frac{b}{\sqrt{2n}}\right]$ vaut approximativement, lorsque n est très grand,

$$\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k-m)! \pi^k} \int_{[a,b]^k} \det \left(\left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right) d\lambda_1 \cdots d\lambda_k.$$

Ces deux résultats possèdent de nombreuses preuves. Nous avons choisi d'utiliser une stratégie accessible au niveau de l'agrégation et mêlant des notions mathématiques variées et très riches.

4.2.3 Commentaires des correcteurs

Les parties abordées par la grande majorité des candidats sont les parties I, II, III (uniquement les questions 1 et 2) et IV (essentiellement la question 1). Les candidats de bon niveau traitent également la partie IV ainsi que la partie V. La partie VI est très peu abordée par les candidats sauf éventuellement la question 1. Voici les remarques précises des correcteurs par partie.

Partie I

- Les questions 3, 4 et 6 n'ont pas posé de difficulté particulière aux candidats.
- Si la question 1 est correctement traitée par une part importante des candidats, le jury est surpris d'observer qu'un nombre non négligeable de candidats à l'agrégation :
 - confond séries entières et développements limités ;
 - ne soit pas capable d'invoquer clairement et précisément que le produit de deux fonctions développables en série entière est développable en série entière ;
 - pense qu'une fonction de classe C^∞ est développable en série entière.
- Pour la question 2, il est surprenant de constater que le théorème de dérivation terme à terme des séries entières semble inconnu par une part importante des candidats ! Les explications sont souvent alambiquées et fausses (« la série converge uniformément ou normalement donc elle est dérivable terme à terme »). L'unicité des coefficients est assez souvent remplacée par une « identification » nébuleuse. Rappelons que la maîtrise des séries de fonctions et des séries entières est un attendu pour un candidat à l'agrégation.
- La question 5 est bien trop souvent formelle : l'intégration par parties généralisées n'est pas souvent justifiée, l'annulation du crochet non plus. Régulièrement, il est invoqué une itération sans qu'elle soit menée. Les candidats les plus consciencieux ont pensé à justifier l'existence des intégrales intervenants dans l'égalité et ont pensé à effectuer une récurrence.
- La question 7 est abordée par une minorité de copies et il s'agit essentiellement du cas $k = 0$. Pour le cas général, les stratégies sont variées (récurrence, dérivation sous l'intégrale, propriété de la transformée de Fourier). Une part importante des candidats ayant procédé par récurrence n'a pas traité le cas $k = 1$ ce qui s'avère indispensable compte tenu de la récurrence double vérifiée par la suite $(H_n)_n$.
- Seuls les meilleurs candidats traitent la question 8.

Partie II

- Une minorité des candidats ne répond pas à la question 1 ou donne une réponse fantaisiste voire n'ayant aucune sens. Rappelons que les espaces préhilbertiens sont un attendu de l'agrégation et que la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie est une notion importante.
- Les questions 2 à 6 n'apportent pas de commentaires particuliers de la part du jury, elles ont joué le rôle de filtre selon le niveau des candidats
- Seuls les meilleurs candidats traitent la question 7.

Partie III

- Le jury est surpris que la question 1.a) soit si mal traitée par les candidats. La résolution, dans \mathbf{C} , de l'inéquation $1 - \frac{2}{z^2} < 0$ est confuse, les candidats sous-entendent que $z \in \mathbf{R}$ (voire pour

certaines faisant une étude de la fonction réelle $x \mapsto 1 - \frac{2}{x^2}$ ce qui est encore plus clair). Le jury est également surpris que l'égalité

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad \Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x < -\sqrt{2} \end{cases}$$

semble très difficile à démontrer correctement par une majorité de candidats, l'expression $|x|$ ou l'égalité $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ apparaissant peu dans l'argumentaire!

- La question 1.b) n'est traitée correctement que par les meilleurs candidats.
- Pour la question 2, le théorème des résidus semble inconnu ou excessivement mal appliqué par l'immense majorité des candidats.
- Les questions 3 et 4 ne sont quasiment jamais abordées.

Partie IV

- La question 1 a joué un rôle de filtre et est correctement traitée par les candidats ayant un niveau convenable.
- Les questions 2 à 4 n'amènent pas de commentaires particuliers de la part du jury et sont traitées partiellement ou complètement par les candidats de niveau convenable.

Partie V

- Les questions 1 et 2 pouvaient être traitées par de multiples méthodes (niveau lycée par un raisonnement combinatoire, formule d'intégration de la partie précédente ou théorème du transfert). Étonnamment, seul une minorité de candidats a été capable d'y répondre.
- Les questions 3 à 5 et la question 7 sont traitées par les meilleurs candidats.
- La question 6 est abordée par quelques candidats.

Partie VI

Cette partie n'est quasiment jamais abordée sauf la question 1, traitée par un faible nombre de candidats.

4.3 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Corrigé sujet Analyse Probabilités Agrégation externe 2015

PARTIE I : Polynômes d'Hermite.

1. (a) Pour tous réels x et t , on a : $e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} t^n$, $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$ et le rayon de convergence de chacune vaut $+\infty$.
- (b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $\forall t \in \mathbf{R}$, $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} e^{-2xt} e^{-t^2}$, ψ est développable en série entière avec un rayon infini comme le produit de deux telles fonctions.
- (c) Puisque ψ est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini, elle est égale à sa série de Taylor c'est-à-dire pour tout $(x, t) \in \mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{(n)}(x)}{n!} t^n = \varphi(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \\ &\Leftrightarrow e^{2xt-t^2} = \frac{\psi(t)}{\varphi(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \end{aligned}$$

2. Comme la fonction $t \mapsto e^{2xt-t^2}$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$, elle est C^∞ sur \mathbf{R} et on peut la dériver terme à terme. En dérivant la relation (1) par rapport à t , on obtient :

$$\begin{aligned} 2(x-t)e^{2xt-t^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} \Leftrightarrow 2(x-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2xH_n(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2H_n(x)t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_{n-1}(x)t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nH_{n-1}(x)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nH_{n-1}(x)t^n}{n!}$$

et en utilisant l'unicité des coefficients d'une somme de série entière.

3. Il est immédiat que $H_0 = 1$, $H_1 = 2X$ et on démontre par récurrence double la propriété (\mathcal{P}_n) : « $H_n \in \mathbf{R}[X]$ et $\deg(H_n) = n$ ». Si a_n est le coefficient de degré n de H_n alors la relation de récurrence montre que $H_{n+1} \in \mathbf{R}[X]$ et $a_{n+1} = 2a_n$ donc $a_n = 2^n a_0 = 2^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. On procède par récurrence simple en posant (\mathcal{P}_n) : « (3) est vraie pour l'entier n ».

Initialisation ($n = 1$) :

$$\frac{1}{2^1(1-1)!} \left(\frac{H_1(x)H_0(y) - H_0(x)H_1(y)}{x-y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x-2y}{x-y} \right) = 1 = K_0(x, y) \Rightarrow (\mathcal{P}_1) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Supposons (\mathcal{P}_n) vraie pour un certain entier $n \in \mathbf{N}^*$ alors

$$K_{n+1}(x, y) = K_n(x, y) + \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{2^n(n-1)!} \left(\frac{H_n(x)H_{n-1}(y) - H_{n-1}(x)H_n(y)}{x-y} \right) + \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{2^n n! (x-y)} (H_n(x)nH_{n-1}(y) - H_{n-1}(x)H_n(y) + (x-y)H_n(x)H_n(y)) \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{2^n n! (x-y)} (H_n(x) \left[yH_n(y) - \frac{1}{2}H_{n+1}(y) \right] - \left[xH_n(x) - \frac{1}{2}H_{n+1}(x) \right] H_n(y) + (x-y)H_n(x)H_n(y)) \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}n!(x-y)} (H_{n+1}(x)H_n(y) - H_n(x)H_{n+1}(y)) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1}) \text{ est vraie.}$$

5. Pour tout polynôme P , φP est continue sur \mathbf{R} , $\varphi(x)P(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-|x|})$ et $x \mapsto e^{-|x|}$ est intégrable sur \mathbf{R} donc φP aussi. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A > 0$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \varphi^{(n)} P &= \left[\varphi^{(n-1)} P \right]_{-A}^A - \int_{-A}^A \varphi^{(n-1)} P' \underset{A \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} \\ \int_{\mathbf{R}} \varphi^{(n)} P &= - \int_{\mathbf{R}} \varphi^{(n-1)} P' = (-1)^2 \int_{\mathbf{R}} \varphi^{(n-2)} P^{(2)} = \dots = (-1)^n \int_{\mathbf{R}} \varphi^{(0)} P^{(n)}. \end{aligned}$$

6. En remplaçant à la question précédente P par H_m et en remarquant que $\varphi^{(n)} = (-1)^n H_n \varphi$, on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_m(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} H_m^{(n)} d\mu(x). \text{ On a } H_m^{(n)} = n!2^n \delta_{n,m} \text{ (car } \deg(H_m) = m < n \text{)}$$

alors $H_m^{(n)} = 0$ et $n = m$, $H_n^{(n)} = (\deg(H_n))!$ coefficient dominant de $H_n = n!2^n$ donc

$$\int_{\mathbf{R}} H_n(x)H_m(x) d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} n!2^n \delta_{n,m} d\mu(x) = n!2^n \delta_{n,m}.$$

7. En remplaçant x par $\sqrt{2}x$ dans cette dernière formule puis en effectuant le changement de variable $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$, on obtient $e^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/4} e^{-ixs} ds$. Or la transformée de Fourier vérifie la relation :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \text{ (fonctions à décroissances rapides), } \forall k \in \mathbf{N}, \quad (\mathcal{F}(f))^{(k)} = (-i)^k \mathcal{F}\left(t \mapsto t^k f(t)\right)$$

et en choisissant la fonction $f : t \mapsto e^{-t^2/4} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on obtient la formule demandée.

8. En utilisant la formule établie à la question précédente et en utilisant le changement de variable $t = s\sqrt{2n}$, on a :

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{i^n e^{x^2/(2n)}}{2\sqrt{\pi}} (\sqrt{2n})^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} s^n e^{-nt^2/2n} e^{-ixs} ds = \frac{i^n e^{x^2/(2n)}}{2\sqrt{\pi}} (\sqrt{2n})^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} (se^{-s^2/2})^n e^{-ixs} ds$$

En utilisant la relation de Chasles ($\mathbf{R} = \mathbf{R}_- \cup \mathbf{R}_+$) et le changement de variable $t = -s$ dans l'intégrale sur \mathbf{R}_- , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (se^{-s^2/2})^n e^{-ixs} ds = \int_0^{+\infty} (se^{-s^2/2})^n e^{-ixs} ds + (-1)^n \int_0^{+\infty} (se^{-s^2/2})^n e^{ixs} ds.$$

Si l'on pose $g : t \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \ln(t) - \frac{t^2}{2}$, on a $\int_0^{+\infty} (se^{-s^2/2})^n e^{-ixs} ds = \int_0^{+\infty} e^{ng(t)} e^{-ixt} dt$. Il est aisé de constater que $t \mapsto e^{ixt}$ et g vérifient les hypothèses de la méthode de Laplace avec $u_0 = 1$ et $t_0 = 1$ ($g(t_0) = -\frac{1}{2}$, $g''(t_0) = -2$) donc

$$\int_0^{+\infty} e^{ng(t)} e^{-ixt} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{\pi} e^{-ix} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}}\right) \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{ng(t)} e^{ixt} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{\pi} e^{ix} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}}\right).$$

En remarquant que $e^{x^2/(2n)} = 1 + o(1)$, on en déduit la formule attendue.

PARTIE II : Projection orthogonale sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

- Si on note $p(x)$ ce projeté alors $p(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle_E e_k$.
- $(L^2(\mathbf{R}, \mu), \langle, \rangle)$ est un préhilbert, $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L^2(\mathbf{R}, \mu)$.
 $\left(\frac{H_k}{\|H_k\|}\right)_{0 \leq k \leq n-1} = \left(\frac{H_k}{\sqrt{2^k k!}}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une famille orthonormée de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, de cardinal $n = \dim(\mathbf{R}_{n-1}[X])$ donc c'est une base orthonormée de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ donc pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}, \mu)$:

$$\Pi_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle f, \frac{H_k}{\|H_k\|} \right\rangle \frac{H_k}{\|H_k\|} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x)}{2^k k!} \int_{\mathbf{R}} f(y) H_k(y) d\mu(y) \underset{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de l'intégrale}}}{=} \int_{\mathbf{R}} f(y) K_n(x, y) d\mu(y).$$

- Un calcul direct nous donne :

$$\int_{\mathbf{R}} K_n(x, y) K_n(y, z) d\mu(y) = \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x)}{\|H_k\|^2} H_k, \sum_{l=0}^{n-1} \frac{H_l}{\|H_l\|^2} H_l(z) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{H_k(x) H_l(z)}{\|H_k\|^2 \|H_l\|^2} \langle H_k, H_l \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{H_k(x) H_k(z)}{\|H_k\|^2 \|H_l\|^2} \delta_{k,l} \|H_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x) H_k(z)}{\|H_k\|^2} = K_n(x, z) \quad (4.18)$$

$$\int_{\mathbf{R}} K_n(x, x) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\|H_k\|^2} \langle H_k, H_k \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

4. (a) On a ${}^tBB = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n c_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,i} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n \frac{H_{k-1}(t_i) H_{k-1}(t_j)}{\|H_{k-1}\| \|H_{k-1}\|} = K_n(t_i, t_j)$ donc $A = {}^tBB$. On note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne du déterminant $\det(H_{i-1}(t_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ c'est-à-dire $L_i = (H_{i-1}(t_j))_{1 \leq j \leq n}$. D'après la question 3 de la partie I, pour tout entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe un polynôme R_i tel que $H_i = 2^i X^i + R_i$ avec $\mathbf{R}_{i-1}[X] = \text{Vect}(H_0, \dots, H_{i-1})$. En particulier, il existe des réels $a_0^{(i)}, \dots, a_{i-1}^{(i)}$ tels que $R_{n-1} = \sum_{k=0}^{i-1} a_k^{(i)} H_k$.

En effectuant les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - \sum_{k=0}^{i-2} a_k^{(i-1)} H_k$ en commençant par $i = n$ puis $i = n-1$ et ainsi de suite jusqu'à $i = 2$, on obtient que :

$$\begin{aligned} \det(H_{i-1}(t_j))_{1 \leq i,j \leq n} &= \det\left(\left(2^{i-1} t_j^{i-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right) = \left(\prod_{i=1}^n 2^{i-1}\right) \det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right) \\ &= 2^{n(n-1)/2} \det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right). \end{aligned}$$

- (b) D'après la question précédente, on a : $\det\left(\left(K_n(t_i, t_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right) = \det({}^tB) \det(B) = (\det(B))^2$.

En utilisant la multilinéarité du déterminant et en posant $c_i = 2^{i-1} (i-1)!$, on a :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det\left(\left(\frac{H_{i-1}(t_j)}{\sqrt{2^{i-1} (i-1)!}}\right)_{i,j}\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \sqrt{c_i}} \det\left(\left(H_{i-1}(t_j)\right)_{i,j}\right) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n c_i}} \det\left(\left(2^{i-1} t_j^{i-1}\right)_{i,j}\right) \quad (4.19) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n 2^{i-1}}{\sqrt{\prod_{i=1}^n 2^{i-1} \prod_{i=0}^{n-1} i!}} \det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{i,j}\right) \stackrel{\text{Vandermonde}}{=} \sqrt{\frac{2^{n(n-1)/2}}{\prod_{i=0}^{n-1} i!}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i) \text{ cqfd.} \end{aligned}$$

5. Si ε est la signature, on a pour la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,j} = H_{i-1}(t_j)$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \Rightarrow (\det(A))^2 = \sum_{(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} a_{\sigma'(i),i}$$

puis en intégrant sur \mathbf{R}^n relativement à la mesure $d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n)$ et en utilisant la formule de Fubini

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(t_1) \cdots f(t_n) d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n) = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}} f(t_i) d\mu(t_i)$$

(ce qui est licite car chaque fonction intervenant dans les intégrales sont intégrables sur le domaine considéré), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \left(\det(H_{i-1}(t_j))_{1 \leq i,j \leq n}\right)^2 d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n) &= \sum_{(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n \underbrace{\langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma'(i)-1} \rangle}_{=0 \text{ si } \sigma(i-1) \neq \sigma'(i-1)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma(i)-1} \rangle \stackrel{\varepsilon^2=1}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n \langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma(i)-1} \rangle \end{aligned}$$

car $\prod_{i=1}^n \langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma'(i)-1} \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma'(i)-1} \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(i) - 1 = \sigma'(i) - 1 \Leftrightarrow \sigma = \sigma'$.

6. D'après la question précédente, en effectuant le changement de variable bijectif $j = \sigma(i) - 1$, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\det (H_{i-1}(t_j))_{i,j} \right)^2 d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n) \stackrel{j=\sigma(i)}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=0}^{n-1} \langle H_i, H_i \rangle = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=0}^{n-1} 2^i i! = n! 2^{n(n-1)/2} \prod_{i=0}^{n-1} i!$$

D'autre part, à l'aide de la question 4, on peut écrire :

$$\begin{aligned} q_n(t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{n!} \det \left(K_n(t_i, t_j)_{1 \leq i, j \leq n} \right) = \frac{1}{n!} (\det(B))^2 = \frac{1}{n! 2^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n (i-1)!} \left(\det \left((H_{i-1}(t_j))_{i,j} \right) \right)^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2^{n(n-1)/2} \prod_{i=0}^n i!} \left(\det \left((H_{i-1}(t_j))_{i,j} \right) \right)^2}_{=\alpha} = \frac{1}{2^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^n i!} \left(2^{n(n-1)/2} \det \left((t_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n} \right) \right)^2 \\ &= D_n \underbrace{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2}_{=\beta} \end{aligned}$$

En utilisant que $q_n = \alpha$ et la valeur de $\det \left((H_{i-1}(t_j))_{i,j} \right)$, on obtient :

$\int_{\mathbf{R}^n} q_n(t_1, \dots, t_n) d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n) = 1$. En utilisant cette formule et l'égalité $q_n = \beta$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} D_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n) &= 1 \\ \Leftrightarrow D_n \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-t_1^2} \dots \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-t_n^2} dt_1 \dots dt_n &= 1 \\ \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 e^{-(t_1^2 + \dots + t_n^2)} dt_1 \dots dt_n &= \frac{\pi^{n/2}}{D_n} = \pi^{n/2} 2^{-n(n-1)/2} \prod_{j=0}^n j! \end{aligned}$$

7. En suivant l'indication proposée, on a :

$$\det \left(K_n(t_i, t_j)_{1 \leq i, j \leq m} \right) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+m} K_n(t_k, t_m) \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \text{ et } i \neq k \\ 1 \leq j \leq m-1}} \right).$$

Soit $k \in \{1, \dots, m-1\}$. On développe le mineur $\det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \text{ et } i \neq k \\ 1 \leq j \leq m-1}} \right)$ selon la dernière ligne de ce mineur de taille $m-1$ dont sa dernière ligne est de la forme $(K_n(t_m, t_l))_{1 \leq l \leq m-1}$ ce qui nous donne :

$$\det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \text{ et } i \neq k \\ 1 \leq j \leq m-1}} \right) = \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^{l+m-1} K_n(t_m, t_l) \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \text{ et } i \neq k \\ 1 \leq j \leq m-1 \text{ et } j \neq l}} \right)$$

Par conséquent, on a :

$$\det \left(K_n(t_i, t_j)_{1 \leq i, j \leq m} \right) = K_n(t_m, t_m) \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq m-1}} \right) + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+m} K_n(t_k, t_m) * \\ \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \text{et } i \neq k \\ 1 \leq j \leq m-1}} \right) = K_n(t_m, t_m) \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq m-1}} \right) + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^{k+m} (-1)^{l+m-1} \\ * K_n(t_k, t_m) K_n(t_m, t_l) \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \text{ et } i \neq k \\ 1 \leq j \leq m-1 \text{ et } j \neq l}} \right)$$

En intégrant cette relation suivant t_m (relativement à la mesure μ) et en utilisant la question 3, on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}} \det \left(K_n(t_i, t_j)_{1 \leq i, j \leq m} \right) d\mu(t_m) = n \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq m-1}} \right) \quad (4.20) \\ - \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^{k+l} \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \text{ et } i \neq k \\ 1 \leq j \leq m-1 \text{ et } j \neq l}} \right) K_n(t_k, t_l)$$

La formule suivante (obtenue par développement selon la dernière colonne) permet d'obtenir la formule souhaitée :

$$\det \left((K_n(t_i, t_j))_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq m-1}} \right) = \sum_{l=1}^{m-1} (-1)^{k+l} \det \left(K_n(t_i, t_j)_{\substack{1 \leq i \leq m-1 \text{ et } i \neq k \\ 1 \leq j \leq m-1 \text{ et } j \neq l}} \right) K_n(t_k, t_l).$$

PARTIE III : Holomorphie.

1. (a) Soit $z \in \mathbf{C}$ alors $1 - \frac{2}{z^2} \in \mathbf{R}_- \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 \in \mathbf{R} \\ 1 \leq \frac{2}{z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 \in \mathbf{R}_+ \\ z^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. La fonction $z \mapsto 1 - \frac{2}{z^2}$ étant holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et la fonction log étant holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$, on en déduit que Φ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. La fonction log coïncidant sur \mathbf{R}_+^* avec la fonction ln, on a :

$$\Phi(x) = x \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} = x \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x^2}} = x \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x > \sqrt{2}; \\ -\sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x < -\sqrt{2}. \end{cases}$$

- (b) La fonction $F : Z \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \ln(1 - 2Z)\right)$ est holomorphe au voisinage de 0, elle admet donc un développement limité en 0 de la forme $F(Z) \underset{Z \rightarrow 0}{=} F(0) + O(Z) \underset{Z \rightarrow 0}{=} 1 + O(Z)$. Ainsi il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que :

$$|Z| \leq \alpha \Rightarrow |F(Z) - 1| \leq C|Z| \Rightarrow \left(|w| \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \left| F\left(\frac{1}{w^2}\right) - 1 \right| \leq \frac{C}{|w^2|} \Leftrightarrow |\Phi(w) - w| \leq \frac{C}{|w|} \right) \quad (4.21) \\ \forall R \geq \max\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, |z|\right), \quad \forall w \in C(O, R), \quad \left| \int_{C(0, R)} \frac{\Phi(w) - w}{w - z} dw \right| = \left| \int_{[0, 2\pi]} \frac{\Phi(Re^{it}) - Re^{it}}{Re^{it} - z} iR e^{it} dt \right| \\ \leq \int_{[0, 2\pi]} \left| \frac{\Phi(Re^{it}) - Re^{it}}{Re^{it} - z} iR e^{it} \right| dt \leq \int_{[0, 2\pi]} \frac{\frac{C}{R}}{||Re^{it}| - |z||} R dt = \frac{2\pi C}{R - |z|} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Soit R_ε le rectangle proposé et $z \in \mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. La fonction $w \mapsto \frac{\Phi(w)}{w-z}$ étant holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ sauf en $w = z$ et admet $\Phi(z)$ pour résidu en $w = z$, le théorème des résidus au contour $\Gamma_{R,\varepsilon}$ montre que :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = 2\pi i \Phi(z) \Leftrightarrow \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw - \int_{R_\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = 2\pi i \Phi(z)$$

$$\boxed{\lim_{R \rightarrow +\infty}} \text{ Pour tout } R > |z| : \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)-w}{w-z} dw = \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw - \int_{C(O,R)} \frac{w}{w-z} dw$$

$$= \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw - 2\pi i z. \text{ En utilisant la question précédente et en faisant tendre } R \text{ vers } +\infty, \text{ on}$$

$$\text{obtient : } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = 2\pi i z.$$

$\boxed{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}}$ On a $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-, \log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$ avec $\arg(z)$ l'argument de z appartenant à $] -\pi, \pi[$. Soit $w \in [-\sqrt{2} - i\varepsilon, \sqrt{2} - i\varepsilon] \Leftrightarrow w = t - i\varepsilon$ avec $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\setminus \{0\}$, on a :

$$1 - \frac{2}{(t - i\varepsilon)^2} = 1 - \frac{2}{t^2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{i\varepsilon}{t}\right)^2} = 1 - \frac{2}{t^2} \left[1 - \frac{2i\varepsilon}{t} + o(\varepsilon) \right] = 1 - \frac{2}{t^2} + i \frac{4\varepsilon}{t^3} + o(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \left(1 - \frac{2}{(t - i\varepsilon)^2} \right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{2}{t^2} = \frac{t^2 - 2}{t^2} < 0 \text{ et } \operatorname{Im} \left(1 - \frac{2}{(t - i\varepsilon)^2} \right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{4\varepsilon}{t^3} \begin{cases} > 0 \text{ si } \varepsilon t > 0 \\ < 0 \text{ si } \varepsilon t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(1 - \frac{2}{(t - i\varepsilon)^2} \right) = \begin{cases} \pi \text{ si } t > 0 \\ -\pi \text{ si } t < 0 \end{cases} \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(1 - \frac{2}{(t + i\varepsilon)^2} \right) = \begin{cases} -\pi \text{ si } t > 0 \\ \pi \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \Phi(t - i\varepsilon) = \begin{cases} t\sqrt{2-t^2} \times \frac{1}{|t|} e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{2-t^2} & \text{si } t > 0 \\ t\sqrt{2-t^2} \times \frac{1}{|t|} e^{i\pi/2} = -i\sqrt{2-t^2} & \text{si } t < 0 \end{cases} = -i\sqrt{2-t^2}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(t + i\varepsilon) = \begin{cases} t\sqrt{2-t^2} \times \frac{1}{|t|} e^{i\pi/2} = i\sqrt{2-t^2} & \text{si } t > 0 \\ t\sqrt{2-t^2} \times \frac{1}{|t|} e^{-i\pi/2} = i\sqrt{2-t^2} & \text{si } t < 0 \end{cases} = i\sqrt{2-t^2}$$

Il est aisé de vérifier que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\sqrt{2}-\varepsilon-i\varepsilon}^{-\sqrt{2}-i\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\sqrt{2}-i\varepsilon}^{\sqrt{2}+\varepsilon-i\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\sqrt{2}-\varepsilon+i\varepsilon}^{-\sqrt{2}+i\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\sqrt{2}+i\varepsilon}^{\sqrt{2}+\varepsilon+i\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = 0$$

(la fonction sous l'intégrale possède une limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ valant $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(t \pm i\varepsilon) = e^{i\theta} \sqrt{t^2 - 2}$ ave

$\theta \in \mathbf{R}$ et l'intervalle a une longueur qui tend vers 0). Il est aisé de vérifier que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Phi(\sqrt{2}+it)}{\sqrt{2}+it-z} dt =$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Phi(-\sqrt{2}+it)}{-\sqrt{2}+it-z} dt = 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R_\varepsilon} \frac{\Phi(w)}{w-z} dw = i \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2-t^2}}{z-t} dt + i \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2-t^2}}{z-t} dt = 2i \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2-t^2}}{z-t} dt.$$

On conclut en faisant tendre R vers $+\infty$ et ε vers 0^+ dans la formule des résidus obtenue initialement.

3. (a) Soit $H_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} H_\infty$. Soit K un compact de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall z \in K, |\operatorname{Im}(z)| \geq \alpha \Rightarrow \forall (n, z) \in \mathbf{N}^* \times K :$

$$\begin{aligned} |H_n(z)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{z-t} d\sigma_n(t) \right| \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|z-t|} d\sigma_n(t) \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\operatorname{Im}(z-t)|} d\sigma_n(t) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|} d\sigma_n(t) \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\alpha} d\sigma_n(t) = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Preuve via Montel. Ainsi la famille $(H_n)_{n \geq 1}$ est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ donc d'après le théorème de Montel, elle admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R})$. Or $(H_n)_{n \geq 1}$ ne possède qu'une valeur d'adhérence qui est H_∞ (la limite uniforme est la limite simple) donc la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Preuve via Ascoli. On a :

$$|H_n(z) - H_n(z')| = |z' - z| \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{d\sigma_n(t)}{(z-t)(z'-t)} \right| \leq |z' - z| \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\alpha^2} d\sigma_n(t) = \frac{|z' - z|}{\alpha^2}$$

On peut affirmer que la partie $\overline{\{H_n, n \in \mathbf{N}^*\}}$ est fermée, bornée et équicontinue donc compacte dans $C^0(K, \mathbf{C})$ (d'après le théorème d'Ascoli) donc elle possède une valeur d'adhérence dans $C^0(K, \mathbf{C})$. Comme pour le cas Montel, on en déduit que $(H_n)_{n \geq 1}$ converge vers H_∞ sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et sa limite est holomorphe (par convergence uniforme sur tout compact) donc $H_\infty \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R})$ et $(H_n)_{n \geq 1}$ converge vers H_∞ dans $\mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R})$.

- (b) Soit $z \in i\mathbf{R}_+^*$, il existe $\beta > 0$ tel que $z = i\beta$. On a $(H_\infty(i\beta))^2 - 2i\beta H_\infty(i\beta) + 2 = 0 \Leftrightarrow H_\infty(i\beta) = i(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2})$

$$\text{et } \forall n \geq 1, \underbrace{\operatorname{Im}(i\beta)}_{>0} \operatorname{Im}(H_n(i\beta)) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(H_n(i\beta)) > 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(H_\infty(i\beta)) < 0 \Rightarrow \quad (4.23)$$

$$H_\infty(i\beta) = i\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 2}\right) \underset{\beta > 0}{=} i\beta - i\beta \sqrt{1 - \frac{2}{\beta^2}} = i\beta - i\beta \exp\left(\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)\right) = G(i\beta)$$

donc les fonctions G et H_∞ sont holomorphes sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et coïncident sur $i\mathbf{R}_+^*$ donc elles sont égales sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

PARTIE IV : Intégration et probabilités sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 + ia_3 \\ a_2 - ia_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbf{C})$, on a : $\operatorname{Tr}(M^2) = a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2$ donc

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi^2} \int_{U_{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4}} e^{-\operatorname{Tr}(M^2)} d\omega_2(M) &= \frac{2}{\pi^2} \int_{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4} e^{-(x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &= \left(\int_{I_1} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_1^2} dx_1 \right) \left(\int_{I_2} \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} e^{-2x_2^2} dx_2 \right) \left(\int_{I_2} \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2}} e^{-2x_3^2} dx_3 \right) \left(\int_{I_4} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_4^2} dx_4 \right) \\ &= \left(\int_{I_1} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_1^2} dx_1 \right) \left(\int_{\sqrt{2}I_2} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_2^2} dx_2 \right) \left(\int_{\sqrt{2}I_2} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_3^2} dx_3 \right) \left(\int_{I_4} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_4^2} dx_4 \right) \end{aligned}$$

d'où $P(X \in U_{I_1, I_2, I_3, I_4}) = P((X_1 \in I_2) \cap (X_2 \in \sqrt{2}I_2) \cap (X_3 \in \sqrt{2}I_3) \cap (X_4 \in I_4))$. Si $(X_k)_{1 \leq k \leq 4}$ sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ alors pour tous intervalles $(I_k)_{1 \leq k \leq 4}$ de \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} P(X \in U_{I_1, I_2, I_3, I_4}) &= P(X_1 \in I_2) P(X_2 \in \sqrt{2}I_2) P(X_3 \in \sqrt{2}I_3) P(X_4 \in I_4) \\ &= \int_{I_1} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{\sqrt{2}I_2} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_2^2} dx_2 \int_{\sqrt{2}I_2} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_3^2} dx_3 \int_{I_4} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_4^2} dx_4 = \frac{2}{\pi^2} \int_{U_{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4}} e^{-\text{Tr}(M^2)} d\omega_2(M) \end{aligned}$$

Réciproquement, si pour tous intervalles $(I_k)_{1 \leq k \leq 4}$ de \mathbf{R} , on a :

$$P(X \in U_{I_1, I_2, I_3, I_4}) = \frac{2}{\pi^2} \int_{U_{I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4}} e^{-\text{Tr}(M^2)} d\omega_2(M).$$

En choisissant $I_2 = I_3 = I_4 = \mathbf{R}$ alors pour tout intervalle I_1 , on a :

$$P(X_1 \in I_1) = P(X \in U_{I_1, \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R}}) = \int_{I_1} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_1^2} dx_1$$

donc X_1 suit la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, de même avec X_2, X_3 et X_4 . En outre, pour tous intervalles $(I_k)_{1 \leq k \leq 4}$, on a :

$$\begin{aligned} P((X_1 \in I_2) \cap (X_2 \in \sqrt{2}I_2) \cap (X_3 \in \sqrt{2}I_3) \cap (X_4 \in I_4)) &= P(X \in U_{I_1, I_2, I_3, I_4}) = \int_{I_1} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_1^2} dx_1 \\ &\int_{I_2} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_2^2} dx_2 \int_{I_3} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_3^2} dx_3 \int_{I_4} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x_4^2} dx_4 = P(X_1 \in I_2) P(X_2 \in \sqrt{2}I_2) P(X_3 \in \sqrt{2}I_3) P(X_4 \in I_4). \end{aligned}$$

2. Si on pose $M = (m_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n} \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ avec $m_{k,l} = u_{k,l} + iv_{k,l}$ où $(u_{k,l}, v_{k,l}) \in \mathbf{R}^2$ pour tout $(k, l) \in \{1, \dots, n\}^2$. Il est immédiat que $v_{k,k} = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. On a $M = M^*$ donc :

$$\text{Tr}(M^2) = \text{Tr}(MM^*) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |m_{k,l}|^2 = \sum_{k=1}^n |m_{k,k}|^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} |m_{k,l}|^2 = \sum_{k=1}^n u_{k,k}^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} (u_{k,l}^2 + v_{k,l}^2).$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} e^{-\text{Tr}(M^2)} d\omega_n(M) &= \int_{\mathbf{R}^{n^2}} \prod_{k=1}^n e^{-u_{k,k}^2} du_{k,k} \prod_{1 \leq k < l \leq n} e^{-2u_{k,l}^2} du_{k,l} \prod_{1 \leq k < l \leq n} e^{-2v_{k,l}^2} dv_{k,l} \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbf{R}} e^{-u_{k,k}^2} du_{k,k} * \prod_{1 \leq k < l \leq n} \int_{\mathbf{R}} e^{-2u_{k,l}^2} du_{k,l} \prod_{1 \leq k < l \leq n} \int_{\mathbf{R}} e^{-2v_{k,l}^2} dv_{k,l} \text{ (Fubini)} \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbf{R}} e^{-u_{k,k}^2} du_{k,k} \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{1}{2^{1/2}} \int_{\mathbf{R}} e^{-u_{k,l}^2} du_{k,l} \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{1}{2^{1/2}} \int_{\mathbf{R}} e^{-v_{k,l}^2} dv_{k,l} \\ &= \prod_{k=1}^n \pi^{1/2} \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}} \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}} = \frac{(\pi^{1/2})^{n+n(n-1)/2+n(n-1)/2}}{(2^{1/2})^{n(n-1)/2+n(n-1)/2}} = \frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}}. \end{aligned}$$

Or $\forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$, $\text{Tr}(M^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres de M , on a par la

formule de Weyl :

$$\int_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} e^{-\text{Tr}(M^2)} d\omega_n(M) = C_n \int_{\mathbf{R}^n} e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \right)^2 \prod_{i=1}^n d\lambda_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}} = C_n \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\pi^{n/2}}{D_n} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^n d\mu(\lambda_i) \stackrel{\text{Partie II. q 6}}{\Leftrightarrow} \frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}} = \frac{C_n \pi^{n/2}}{D_n} \Leftrightarrow C_n = \frac{\pi^{n(n-1)/2}}{\prod_{j=0}^n j!}.$$

3. La fonction $\phi : M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \mapsto \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} f(M) e^{-\text{Tr}(M^2)} \in \mathbf{R}$ vérifie :

$$\forall V \in U(n, \mathbf{C}), \quad \forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad \phi(VMV^*) = \phi(M)$$

car f la vérifie ainsi que $M \mapsto \text{Tr}(M^2)$ (puisque $V^* = V^{-1}$ et que la trace est invariante par conjugaison). En outre, on a $\text{Tr}(M^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres (réelles d'après le théorème spectral) de M (comptées avec multiplicité). La fonction f étant bornée et la fonction $M \mapsto e^{-\text{Tr}(M^2)}$ étant intégrable sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$, ϕ est intégrable sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ et la formule de Weyl donne :

$$\int_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} \phi(M) d\omega_n(M) = \frac{C_n}{D_n} \int_{\mathbf{R}^n} g(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^n d\lambda_i$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M) dP_n(M) = \underbrace{\frac{C_n}{D_n} \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} \pi^{n/2}}_{=1 \text{ question III.2}} \int_{\mathbf{R}^n} f(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^n d\mu(\lambda_i)$$

Ainsi en posant $g : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto f(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$, g est bornée (car f l'est). Si l'on note $h : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ qui est continue donc mesurable. Ainsi $g = f \circ h$ est aussi mesurable pour la tribu borélienne (si $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu borélienne de \mathbf{R} alors $\mathcal{C} = f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ est une tribu contenant la tribu borélienne de $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ puisque f est mesurable donc l'image réciproque d'un ouvert est un borélien et la tribu borélienne est la plus petite tribu contenant les ouverts) donc $h^{-1}(\mathcal{C})$ est une tribu de \mathbf{R}^d (car h est continue donc mesurable) contenant la tribu borélienne de \mathbf{R}^d (même argument que pour f) donc $g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbf{R}}) = h^{-1}(f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbf{R}})) = h^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}_{\mathbf{R}^d}$ ce qui démontre la mesurabilité de g). Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note p_σ l'endomorphisme de \mathbf{C}^n définie par : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad p_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de \mathbf{R}^n et P_σ sa matrice dans cette base. Il est immédiat que $P_\sigma \in \mathcal{U}_n(\mathbf{C})$ (ses colonnes forment une base orthonormale de \mathbf{C}^n pour son produit scalaire hermitien canonique). En outre, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ et tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a :

$$g(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}) = f(\text{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})) = f(P_\sigma \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P_\sigma^*)$$

$$= f(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = g(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

4. La fonction F_k vérifie : $\forall V \in U(n, \mathbf{C}), \quad \forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad F_k(VMV^*) = F_k(M)$ car les spectres (comptés avec multiplicité) de M et $VMV^* = VMV^{-1}$ sont égaux et que la fonction $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \gamma(\lambda_{i_1}) \dots \gamma(\lambda_{i_k})$ est invariante par permutation sur les indices (la somme considérée correspond à la $k^{\text{ème}}$ fonction symétrique "des racines" qui est invariante par permutation). D'après la question III. 3 et par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}_n(F_k) = \int_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} F_k(M) dP_n(M) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \int_{\mathbf{R}^n} \gamma(\lambda_{i_1}) \dots \gamma(\lambda_{i_k}) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^n d\mu(\lambda_i).$$

Fixons $i_1 < \dots < i_k$ des entiers de $\{1, \dots, n\}$, on note $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\} = \{i_{k+1}, \dots, i_n\}$. L'application

$\sigma : j \in \{1, \dots, n\} \mapsto i_j$ est clairement une permutation de $\{1, \dots, n\}$ et la fonction q_n étant invariante par permutation, on a pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n : q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = q_n(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}) = q_n(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n})$ donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} f(\lambda_{i_1}) \dots f(\lambda_{i_k}) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^n d\mu(\lambda_i) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\lambda_{i_1}) \dots f(\lambda_{i_k}) q_n(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}, \lambda_{i_{k+1}}, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^n d\mu(\lambda_i) \\ &= \int_{\mathbf{R}^k} f(\lambda_{i_1}) \dots f(\lambda_{i_k}) \left(\int_{\mathbf{R}^{n-k}} q_n(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}, \lambda_{i_{k+1}}, \dots, \lambda_n) d\mu(\lambda_{i_{k+1}}) \dots d\mu(\lambda_{i_n}) \right) \prod_{j=1}^k d\mu(\lambda_{i_j}) \\ &= \int_{\mathbf{R}^k} f(\lambda_1) \dots f(\lambda_k) \left(\int_{\mathbf{R}^{n-k}} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) d\mu(\lambda_{k+1}) \dots d\mu(\lambda_n) \right) \prod_{i=1}^k d\mu(\lambda_i) \end{aligned}$$

car les variables d'intégration sont muettes. D'après les questions II.4 et II. 7, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{n-k}} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i=k+1}^n d\mu(\lambda_i) &= \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \frac{\det(K_n(\lambda_i, \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq n})}{n!} \prod_{i=k+1}^n d\mu(\lambda_i) \\ &= \frac{(n-k)!}{n!} \det(K_n(\lambda_i, \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq k}) \end{aligned}$$

(pour cette dernière égalité, il suffit de faire une itération ou récurrence descendante sur k). On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} f(\lambda_{i_1}) \dots f(\lambda_{i_k}) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{i=1}^n d\mu(\lambda_i) \\ = \frac{(n-k)!}{n!} \int_{\mathbf{R}^k} f(\lambda_1) \dots f(\lambda_k) \det(K_n(\lambda_i, \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq k}) \prod_{i=1}^k d\mu(\lambda_i). \end{aligned}$$

Ainsi dans l'expression de $\mathbb{E}_n(F_k)$, tous les termes ont la même valeur (celle-ci dessus) et la somme comporte $\binom{n}{k}$ termes (nombre de façons de sélectionner k éléments distincts parmi n) d'où le résultat demandé.

PARTIE V : Localisation du spectre.

1. Soit $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicité). Le produit $\chi_I(\lambda_{i_1}) \dots \chi_I(\lambda_{i_k})$ vaut 1 si et seulement si $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}) \in I^k$ et 0 sinon. Ainsi $X_I^{(k)}$ représente le nombre de parties $\{i_1, \dots, i_k\}$ à k éléments de $\{1, \dots, n\}$ telles que $\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}\} \subset I$. Si M possède exactement j valeurs propres (comptées avec multiplicité) appartenant à I alors $X_I^{(k)}(M) = \binom{j}{k}$ (nombre de parties à k éléments dans l'ensemble des j valeurs propres de M appartenant à I avec bien entendu $k \leq j$) et si cette égalité est vérifiée alors M admet nécessairement j valeurs propres (comptées avec multiplicité). Par conséquent, on a $X_I^{(k)}(\mathcal{H}_n(\mathbf{C})) = \left\{ \binom{j}{k}, j \in \{k, \dots, n\} \right\}$ et d'après le théorème du transfert :

$$\mathbb{E}_n(X_I^{(k)}) = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} P\left(X_I^{(k)} = \binom{j}{k}\right) = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} P_n(A_n^{(j)}(I)).$$

2. On a $X_{I,z}(M) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i \in I}} (1-z) = (1-z)^{\text{card}\{i \in \{1, \dots, n\} / \lambda_i \in I\}}$. D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned} Q_{n,I}(z) &= \mathbb{E}_n(X_{I,z}) = \sum_{j=0}^n P_n(A_n^{(j)}(I)) (1-z)^j = P_n(A_n^{(0)}(I)) + \sum_{j=1}^n P_n(A_n^{(j)}(I)) (1-z)^j \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n P(A_n^{(j)}(I)) + \sum_{j=1}^n P_n(A_n^{(j)}(I)) (1-z)^j = 1 + \sum_{j=1}^n P_n(A_n^{(j)}(I)) \left[(1-z)^j - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Or d'après la formule de Taylor en 1, on a : $Q_{n,I}(z) = \sum_{j=0}^n \frac{Q_{n,I}^{(j)}(1)}{j!} (z-1)^j$. La famille $\left((X-1)^j \right)_{0 \leq j \leq n}$

étant une base de $\mathbf{C}_n[X]$, on peut affirmer que $\forall j \in \{0, \dots, n\}$, $\frac{Q_{n,I}^{(j)}(1)}{j!} = (-1)^j P_n(A_n^{(j)}(I))$ ce qui permet de conclure.

3. D'après question précédente et utilisant la question IV.4 avec la fonction $f = \chi_I$ qui est mesurable et bornée :

$$Q_{n,I}(z) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k z^k \mathbb{E}_n(X_I^{(k)}) \quad (4.25)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{z^k}{k!} \int_{\mathbf{R}^k} \chi_I(\lambda_1) \cdots \chi_I(\lambda_k) \det(K_n(\lambda_i, \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq k}) \prod_{i=1}^k d\mu(\lambda_i) \quad (4.26)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{z^k}{k!} \int_{I^k} \det(K_n(\lambda_i, \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq k}) \prod_{i=1}^k d\mu(\lambda_i).$$

4. En utilisant le changement de variable $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k} = \left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}} \right)_{1 \leq i \leq k}$ qui est clairement un C^1 -difféomorphisme de $I_k = \left[\frac{a}{\sqrt{2n}}, \frac{b}{\sqrt{2n}} \right]^k$ sur $[a, b]^k$ et dont la jacobienne vaut $\frac{1}{(\sqrt{2n})^k}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{I_k} \det(K_n(\lambda_i, \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq k}) \prod_{i=1}^k d\mu(\lambda_i) &= \int_{I_k} \det(K_n(\lambda_i, \lambda_j)_{1 \leq i, j \leq k}) \frac{1}{(\pi^{1/2})^k} e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)} \prod_{i=1}^k d\lambda_i \\ &= \frac{1}{\pi^{k/2}} \int_{[a, b]^k} \det\left(K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)_{1 \leq i, j \leq k}\right) e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)/(2n)} \frac{1}{(\sqrt{2n})^k} \prod_{i=1}^k d\lambda_i \\ &= \frac{1}{\pi^k} \int_{[a, b]^k} \det\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)_{1 \leq i, j \leq k}\right) e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)/(2n)} \prod_{i=1}^k d\lambda_i \end{aligned}$$

(par linéarité du déterminant). Tout entier $n \geq 1$, la fonction

$$(t_i)_{1 \leq i \leq k} \mapsto \det\left(\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)\right)_{1 \leq i, j \leq k}\right) e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)/(2n)}$$

est continue et pour tout $(t_i)_{1 \leq i \leq k} \in [a, b]^k$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \det\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}}\right)_{1 \leq i, j \leq k}\right) e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)/(2n)} = \det\left(\left(\frac{\sin(x-y)}{x-y}\right)_{1 \leq i, j \leq k}\right)$$

(par continuité du déterminant qui est une fonction polynôme en les coordonnées dans la base canonique de la matrice). Si on pose :

$$C = \sup_{\substack{(x,y) \in [-a,a]^2 \\ n \in \mathbf{N}^*}} \left| \sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n \left(\frac{x}{\sqrt{2n}}, \frac{y}{\sqrt{2n}} \right) \right|,$$

$$\forall (n, i, j) \in \mathbf{N}^* \times \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\}, \quad a_{i,j} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n \left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}} \right)$$

alors on dispose de la domination valable pour tout $(t_i)_{1 \leq i \leq k} \in [a, b]^k$ et tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \left| \det \left((a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k} \right) e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)/(2n)} \right| = \left| \det \left((a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k} \right) \right| e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)/(2n)} \\ & \leq \left| \det \left((a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k} \right) \right| = \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^k a_{\sigma(i), i} \right| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \prod_{i=1}^k |a_{\sigma(i), i}| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \prod_{i=1}^k C = k! C^k \end{aligned}$$

La fonction $(t_i)_{1 \leq i \leq k} \mapsto k! C^k$ est indépendante de n et intégrable sur $[a, b]^k$ (car c'est compact de \mathbf{R}^k), le théorème de convergence dominée permet de conclure.

5. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq 1$. En posant :

$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,j} = \frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$, l'inégalité d'Hadamard montre que :

$$\left| \det \left((a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq k} \right) \right| \leq \prod_{j=1}^k \sqrt{\sum_{i=1}^k |a_{i,j}|^2} \leq \prod_{j=1}^k \sqrt{\sum_{i=1}^k 1} = \prod_{j=1}^k \sqrt{k} = k^{k/2}.$$

Par conséquent, pour $z \in \mathbf{C}$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{\pi} \right)^k \int_{[a,b]^k} \det \left(\left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right) \prod_{i=1}^k d\lambda_i \right| \\ & \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{|z|}{\pi} \right)^k \int_{[a,b]^k} \left| \det \left(\left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right) \right| \prod_{i=1}^k d\lambda_i \\ & \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{|z|}{\pi} \right)^k \int_{[a,b]^k} k^{k/2} \prod_{i=1}^k d\lambda_i = \frac{1}{k!} \left(\frac{|z|(b-a)}{\pi} \right)^k k^{k/2}. \end{aligned}$$

Si on pose $u_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{|z|(b-a)}{\pi} \right)^k k^{k/2}$ et $c = \frac{|z|(b-a)}{\pi}$ alors pour $z \in \mathbf{C}^*$

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{c}{k+1} \left(\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right)^{1/2} \sqrt{k+1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{k} e^{1/2} \sqrt{k} = \frac{ce^{1/2}}{\sqrt{k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

donc, d'après le critère de D'Alembert, la série $\sum_k u_k$ converge. Ainsi on a $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ quel que soit

$z \in \mathbf{C}^*$ donc la suite $\left(\frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{\pi} \right)^k \int_{[a,b]^k} \det \left(\left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right) d\lambda_1 \cdots d\lambda_k \right)_k$ aussi. D'après le

lemme d'Abel, on peut affirmer que la série entière considérée a un rayon de convergence infini donc sa somme Q est une fonction dé finie et holomorphe sur \mathbf{C} .

6. Pour établir ce résultat, on va utiliser le théorème de convergence dominée sur \mathbf{N} muni de la mesure de comptage ν définie par : $\forall S \subset \mathbf{N}, \nu(S) = \text{card}(S)$ et pour $\alpha \in L^1(\mathbf{N}, \nu)$ (i.e. une suite $(\alpha(k))_{k \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dont la série associée $\sum_k \alpha(k)$ est absolument convergente), on pose

$$\int_{\mathbf{N}} \alpha d\nu = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha(k).$$

Soit $z \in \mathbf{C}$, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on considère la suite $u_z^{(n)} = (u_z^{(n)}(k))_{k \in \mathbf{N}}$ définie par : $\forall k \in \mathbf{N}, u_z^{(n)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$u_z^{(n)}(k) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{\pi}\right)^k \int_{[a,b]^k} \det \left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n \left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right) e^{-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2)/(2n)} \prod_{i=1}^k d\lambda_i.$$

On introduit également la suite $u_z = (u_z(k))_{k \in \mathbf{N}}$ définie par : $u_z(0) = 1$ et $\forall k \geq 1$:

$$u_z(k) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{\pi}\right)^k \int_{[a,b]^k} \det \left(\left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right) \prod_{i=1}^k d\lambda_i.$$

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a : $Q_{n, [a/\sqrt{2n}, b/\sqrt{2n}]}(z) = \sum_{k=0}^n u_z^{(n)}(k) = \int_{\mathbf{N}} u_z^{(n)}(k) d\nu(k)$ et $Q(z) =$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_z(k) = \int_{\mathbf{N}} u_z(k) d\nu(k). \text{ D'après la question IV. 4, on a : } \forall k \in \mathbf{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_z^{(n)}(k) = u_z(k).$$

Soit $C = \sup_{\substack{(x,y) \in [a,b]^2 \\ n \in \mathbf{N}^*}} \left| \sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n \left(\frac{x}{\sqrt{2n}}, \frac{y}{\sqrt{2n}} \right) \right|$. Pour tout entier $(n, k) \in \mathbf{N}^2$, en utilisant l'inégalité

d'Hadamard, on a :

$$\begin{aligned} \left| u_z^{(n)}(k) \right| &\leq \frac{|z|^k}{k!} \int_{[a,b]^k} \left| \det \left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n \left(\frac{t_i}{\sqrt{2n}}, \frac{t_j}{\sqrt{2n}} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \right) \right| d\lambda_1 \cdots d\lambda_k \\ &\leq \frac{|z|^k}{k!} \int_{[a,b]^k} \prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^k C^2 d\lambda_1 \cdots d\lambda_k = \frac{(|z|(b-a)C^2)^k}{k!} k^{k/2} = w_z(k). \end{aligned} \quad (4.27)$$

En outre, $w_z \in L^1(\mathbf{N}, \nu)$ d'après la question précédente. Le théorème de convergence dominée montre que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{N}} u_z^{(n)}(k) d\nu(k) = \int_{\mathbf{N}} u_z(k) d\nu(k) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{n, [a/\sqrt{2n}, b/\sqrt{2n}]}(z) = Q(z)$$

Soit $R > 0$ et $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| \leq R$, on a

$$\begin{aligned} \left| Q_{n, [a/\sqrt{2n}, b/\sqrt{2n}]}(z) - Q(z) \right| &= \left| \int_{\mathbf{N}} (u_z^{(n)}(k) - u_z(k)) d\nu(k) \right| \leq \sup_{\mathbf{N}} \int_{\mathbf{N}} |u_z^{(n)}(k) - u_z(k)| d\nu(k) \\ &\leq \int_{\mathbf{N}} |u_R^{(n)}(k) - u_R(k)| d\nu(k) \end{aligned}$$

Etant donné que la suite $\left(\int_{\mathbf{N}} |u_R^{(n)}(k) - u_R(k)| d\nu(k) \right)_{n \in \mathbf{N}}$ est indépendante de z et tend vers 0, on en déduit la convergence de $Q_{n, [a/\sqrt{2n}, b/\sqrt{2n}]}$ vers Q sur tout disque $\{z \in \mathbf{C}, |z| \leq R\}$.

7. La suite de fonctions holomorphes $\left(Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers Q uniformément sur $\{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 2\}$ donc tout entier m , la suite des dérivées $\left(Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}^{(m)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $Q^{(m)}$ uniformément donc simplement sur $\{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 2\}$. En particulier, pour tout entier m , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}^{(m)}(1) &= Q^{(m)}(1) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^m m! P_n \left(A_n^{(m)} \left(\left[\frac{a}{\sqrt{2n}}, \frac{b}{\sqrt{2n}} \right] \right) \right) = Q^{(m)}(1) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n \left(A_n^{(m)} \left(\left[\frac{a}{\sqrt{2n}}, \frac{b}{\sqrt{2n}} \right] \right) \right) = \frac{(-1)^m}{m!} Q^{(m)}(1) \end{aligned}$$

PARTIE VI : Loi du demi-cercle.

1. A l'aide de la question IV.3, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n \left(\frac{1}{n} X_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]}^{(1)} \right) &= \int_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]} \frac{1}{n} K_n(\lambda_1, \lambda_1) \varphi(\lambda_1) d\lambda_1 \\ &= \int_{[a,b]} \frac{1}{\sqrt{n}} K_n(t\sqrt{n}, t\sqrt{n}) \varphi(t\sqrt{n}) dt = \int_{[a,b]} dv_n(t) = v_n([a,b]). \end{aligned}$$

2. Soient $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$. Etant donné que pour tout $V \in \mathcal{U}_n(\mathbf{C})$, on a $V^* = V^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} R_z(VMV^*) &= \frac{1}{t} \text{Tr}(zI_n - VMV^*)^{-1} = \frac{1}{n} \text{Tr}(zI_n - VMV^{-1})^{-1} = \frac{1}{n} \text{Tr} \left([V(zI_n - M)V^{-1}]^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \text{Tr} \left(V(zI_n - M)^{-1}V^{-1} \right) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left((zI_n - M)^{-1} \right) = R_z(M). \end{aligned}$$

La fonction R_z est continue sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ (car fractionnelle rationnelle en les coefficients de M et n'ayant pas de pôles dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ car toutes les valeurs propres de M sont réelles) et elle est bornée sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ car pour toute matrice $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$, le spectre de $(zI_n - M)^{-1}$ est $\left\{ \frac{1}{z - \lambda_i}, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M (comptées avec multiplicité) donc :

$$|R_z(M)| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \lambda_i} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \lambda_i|} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} (|z - \lambda_i|)} = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} (|z - \lambda_i|)}.$$

En appliquant le résultat de la question III.3 avec la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{nz-t}}$ qui est continue et bornée sur \mathbf{R} , on a :

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \sqrt{n} \mathbb{E}_n \left(R_{\frac{z}{\sqrt{n}}}^{(n)} \right) = \sqrt{n} \frac{1}{1!} \int_{\mathbf{R}^1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{nz - \lambda_1}} K_n(\lambda_1, \lambda_1) \varphi(\lambda_1) d\lambda_1 \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{nz - \sqrt{nt}}} K_n(t\sqrt{n}, t\sqrt{n}) \varphi(t\sqrt{n}) dt = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{z-t} dv_n(t). \end{aligned}$$

3. En passant aux coordonnées polaires, on a :

$$\iint_{|x+iy| \leq R} \frac{dx dy}{|(x+iy) - t|} = \iint_{B(0,R)} \frac{dx dy}{|(x+iy) - t|} = \iint_{B(-t,R)} \frac{dx dy}{|x+iy|} = \iint_{B(-t,R)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_{B(-t,R)} dr d\theta$$

Si $|t| \leq R$ alors $B(t, R) \subset B(0, 2R)$ donc $\iint_{B(-t, R)} drd\theta \leq \iint_{B(0, 2R)} drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2R} dr \right) d\theta = 4\pi R$.

Si $|t| > R$ alors $B(-t, R) \subset B(0, |t| + R) \setminus B(0, |t| - R)$ et l'ensemble des angles polaires des éléments de $B(-t, R)$ vérifient si $t < 0$:

$$\left(\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et } \frac{R}{t} \leq \tan(\theta) \leq -\frac{R}{t} \right) \Leftrightarrow \theta \in \left[\arctan\left(\frac{R}{t}\right), -\arctan\left(\frac{R}{t}\right) \right]$$

et si $t > 0$:

$$\left(\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\text{ et } -\frac{R}{t} \leq \tan(\theta) \leq \frac{R}{t} \right) \Leftrightarrow \theta \in \left[\pi - \arctan\left(\frac{R}{t}\right), \pi + \arctan\left(\frac{R}{t}\right) \right].$$

Par conséquent, l'intervalle des angles polaires des éléments de $B(-t, R)$ est de longueur $2 \left| \arctan\left(\frac{R}{t}\right) \right|$ donc :

$$\iint_{B(-t, R)} drd\theta \leq 2R * 2 \left| \arctan\left(\frac{R}{t}\right) \right| = 4R \left| \arctan\left(\frac{R}{t}\right) \right| \leq 2\pi R$$

Ainsi $c = 4\pi$ convient. Pour tout compact K , il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$ et $\frac{1}{z}$ est intégrable sur $B(0, R)$ donc sur K (il suffit de considérer $t = 0$ dans l'inégalité précédente!).

$$\begin{aligned} \iint_K |G(x + iy)| dx dy &\leq \iint_{B(0, R)} |G(x + iy)| dx dy = \iint_{B(0, R)} \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x + iy - t} dv_n(t) \right| dx dy \\ &\leq \iint_{B(0, R)} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{|x + iy - t|} dv_n(t) dx dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\iint_{B(0, R)} \frac{1}{|x + iy - t|} dx dy \right) dv_n(t) \leq \int_{\mathbf{R}} cR dv_n(t) = cR < +\infty \end{aligned}$$

donc G est bien localement intégrable. Il en est rigoureusement de même pour v_n .

4. Soit K un compact de \mathbf{R}^2 et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ à support inclus dans K . On note $K' = K \cap (\mathbf{R} \times \{0\})$ qui est un compact de \mathbf{R} donc il existe un segment $[\alpha, \beta]$ tel que K' est inclus strictement dans $[\alpha, \beta]$. On fixe $\eta > 0$, on considère $N_\eta = \left\lfloor \frac{\alpha}{\eta} \right\rfloor$ et $M_\eta = \left\lfloor \frac{\beta}{\eta} \right\rfloor + 1$ alors $K' \subset \bigcup_{k=N_\eta}^{M_\eta} B(k\eta, \frac{\eta}{2})$ (il suffit de faire un petit dessin). On pose $K_\eta = K \cap \left(\bigcup_{k=N_\eta}^{M_\eta} B(k\eta, \frac{\eta}{2}) \right)$ et $\|\varphi\|_\infty = \sup_K |\varphi|$, alors pour tout entier n , on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{K_\eta} G_n(x + iy) \varphi(x, y) dx dy \right| &\leq \int_{K_\eta} |G_n(x + iy) \varphi(x, y)| dx dy \leq \|\varphi\|_\infty \int_{K_\eta} |G_n(x + iy)| dx dy \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \sum_{k=N_\eta}^{M_\eta} \int_{B(k\eta, \eta/2)} |G_n(x + iy)| dx dy \leq 4\pi \|\varphi\|_\infty \eta + \eta \sum_{\substack{N_\eta \leq k \leq M_\eta \\ k \neq 0}} 2\pi \left| \arctan\left(\frac{2}{k}\right) \right| \\ &\leq 4\pi \|\varphi\|_\infty \eta + 4\pi \|\varphi\|_\infty \eta \sum_{\substack{N_\eta \leq k \leq M_\eta \\ k \neq 0}} \frac{1}{|k|}. \end{aligned}$$

On a (par comparaison série-intégrale) :

$$\eta \sum_{\substack{N_\eta \leq k \leq M_\eta \\ k \neq 0}} \frac{1}{|k|} = \eta O \left(\int_1^{\max(|N_\eta|, |M_\eta|)} \frac{dt}{t} \right) = \eta O(\ln(|N_\eta| + |M_\eta|)) = \eta O(\ln(\eta)) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

donc $\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \int_{K_\eta} G_n(x+iy) \varphi(x,y) dx dy \right| = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \eta_\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$\left| \int_{K_\eta} G_n(x+iy) \varphi(x,y) dx dy \right| \leq \varepsilon$. De même, on a $\left| \int_{K_\eta} G(x+iy) \varphi(x,y) dx dy \right| \leq \varepsilon$. D'autre part, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{K \setminus K_{\eta_\varepsilon}} G_n(x+iy) \varphi(x,y) dx dy = \int_{K \setminus K_{\eta_\varepsilon}} G(x+iy) \varphi(x,y) dx dy$ en appliquant le théorème de convergence dominée puisque :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in K \setminus K_{\eta_\varepsilon}, \quad |G_n(x+iy)| \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{dv_n(t)}{|x+iy-t|} \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{dv_n(t)}{|y|} = \frac{1}{|y|} \leq \sup_{y \in K \setminus K_\eta} \frac{1}{|y|} = M_{\eta_\varepsilon}$$

donc les fonctions $(G_n \varphi)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont uniformément bornées sur $K \setminus K_{\eta_\varepsilon}$ (qui est un ensemble borné). Par conséquent, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N(\varepsilon), \quad \left| \int_{K \setminus K_{\eta_\varepsilon}} G_n(x+iy) \varphi(x,y) dx dy - \int_{K \setminus K_{\eta_\varepsilon}} G(x+iy) \varphi(x,y) dx dy \right| \leq \varepsilon \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbf{R}^2} G_n(x+iy) \varphi(x,y) dx dy - \int_{\mathbf{R}^2} G(x+iy) \varphi(x,y) dx dy \right| \leq \left| \int_{K_{\eta_\varepsilon}} G_n(x+iy) \varphi(x,y) dx dy \right| \\ & + \left| \int_{K \setminus K_{\eta_\varepsilon}} G_n(x+iy) \varphi(x,y) dx dy - \int_{K \setminus K_{\eta_\varepsilon}} G(x+iy) \varphi(x,y) dx dy \right| + \left| \int_{K \setminus K_{\eta_\varepsilon}} G(x+iy) \varphi(x,y) dx dy \right| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^2} G_n(x+iy) \varphi(x,y) dx dy = \int_{\mathbf{R}^2} G(x+iy) \varphi(x,y) dx dy$.

5. Puisque $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, on considère la fonction $\psi : (r, \theta) \mapsto \varphi(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.30)$$

donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} \\ \sin(\theta) & \frac{1}{r} \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$2\bar{\partial} \varphi = \cos(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i \left(\sin(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos(\theta) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = e^{i\theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right).$$

A l'aide du changement de variable associé aux coordonnées polaires dans l'intégrale double

considérée, on obtient :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{x+iy} \bar{\partial}\varphi(x,y) dx dy &= \frac{1}{2} \int_{r=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r e^{i\theta}} e^{i\theta} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) r dr d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{r=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial\psi}{\partial r} dr \right) d\theta + \frac{i}{2r} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta \right) dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} [\psi(r,\theta)]_{r=0}^{r \rightarrow +\infty} \right) d\theta + \frac{i}{2r} \int_0^{+\infty} ([\psi(r,\theta)]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}) dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -\varphi(0,0) d\theta + 0 = -\pi\varphi(0,0)
\end{aligned}$$

car $\theta \mapsto \psi(r,\theta)$ est 2π -périodique et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi(r,\theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0.$$

6. En utilisant la définition de la dérivation sur les distributions, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\partial}G, \psi \rangle &= \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) G, \psi \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} G, \psi \right\rangle + \frac{i}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial y} G, \psi \right\rangle \quad (4.31) \\
&= -\frac{1}{2} \left\langle G, \frac{\partial\psi}{\partial x} \right\rangle - \frac{i}{2} \left\langle G, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right\rangle = -\langle G, \bar{\partial}\psi \rangle = - \int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{dv(t)}{x+iy-t} \right) \bar{\partial}\varphi(x,y) dx dy \quad (4.32) \\
&= - \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{x+iy-t} \bar{\partial}\varphi(x,y) dx dy \right) dv(t) = \int_{\mathbf{R}} \pi\varphi(t,0) dv(t)
\end{aligned}$$

donc $\bar{\partial}G = v$. Le calcul est identique avec G_n et v_n . Puisque $(G_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers G dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ alors $\frac{\partial G_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial G_n}{\partial y}$ convergent respectivement vers $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial G}{\partial y}$ donc $(\bar{\partial}G_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ vers $\bar{\partial}G$.

7. On notera $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (respectivement $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$) la limite supérieure (respectivement limite inférieure) de la suite $(u_n)_n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ telle que $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) = [a - \varepsilon, b + \varepsilon] \times [0, 1]$ et $\varphi_\varepsilon = 1$ sur $[a, b] \times [0, 1]$ et $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} \varphi_\varepsilon(t,0) dv_n(t) = \int_{\mathbf{R}} \varphi_\varepsilon(t,0) dv(t)$ (car $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$)

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n([a, b]) = \int_{[a,b]} dv_n(t) = \int_{[a,b]} \varphi_\varepsilon(t,0) dv_n(t) \leq \int_{\mathbf{R}} \varphi_\varepsilon(t,0) dv_n(t)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n([a, b]) \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n([a, b]) \end{array} \right\} \leq \int_{\mathbf{R}} \varphi_\varepsilon(t,0) dv(t) = \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t,0) dv(t) \leq \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} dv(t) = \frac{1}{\pi} \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \sqrt{2-t^2} \chi_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}(t) dt$$

puis en faisant tendre ε vers 0, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n([a, b]) \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n([a, b]) \end{array} \right\} \leq \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{2-t^2} \chi_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}(t) dt = v([a, b]).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ telle que $\text{supp} \psi_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \times [0, 1]$ et $\psi_\varepsilon = 1$ sur $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \times [0, 1]$ et $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} \psi_\varepsilon(t,0) dv_n(t) = \int_{[a,b]} \psi_\varepsilon(t,0) dv(t)$ (car $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$)

$\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$). Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$v_n([a, b]) = \int_{[a, b]} dv_n(t) \geq \int_{[a, b]} \psi_\varepsilon(t, 0) dv_n(t) = \int_{\mathbf{R}} \psi_\varepsilon(t, 0) dv_n(t)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ puis ε vers 0, on obtient :

$$\begin{cases} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n([a, b]) \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n([a, b]) \end{cases} \geq \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{2-t^2} \chi_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]}(t) dt = v([a, b]).$$

donc $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n([a, b]) = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} v_n([a, b]) = v([a, b])$ ce qui démontre la convergence de $(v_n([a, b]))_n$ vers $v([a, b])$.