Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

4.1 Énoncé

Le sujet est disponible à l'URL https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid159832/sujets-rapports-des-jurys-agregation-2022.html ou sur le site https://agreg.org.

4.2 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Rapport sur l'épreuve écrite d'Analyse et Probabilités.

Présentation du sujet.

L'objectif principal du sujet d'analyse et probabilités est la démonstration du théorème des nombres premiers. Ce théorème a été prouvé à la fin du XIXème siècle par Hadamard et de la Vallée-Poussin. De nombreuses preuves en ont depuis été données, et celle qui a été suivie dans le sujet est due à Hardy et Littlewood (en 1915), qui l'ont déduite d'un théorème taubérien qu'ils avaient eux-mêmes démontré quelques années auparavant. Karamata a par la suite trouvé une méthode basée sur des outils d'analyse fonctionnelle qui a permis de simplifier la preuve de ce théorème taubérien (et qui par ailleurs a ouvert la voie à une étude systématique de ces théorèmes) : la méthode suivie dans le sujet est une extension des méthodes de Karamata à ce contexte, due à Baran [1].

Le problème est progressif ; il permet à tous les candidats d'aborder un ensemble varié de questions testant leurs connaissances fondamentales d'analyse et de mettre en valeur leur capacité de rédaction. La partie **I** regroupe des résultats utiles pour la suite du sujet sur les fonctions Γ, ζ et l'holomorphie des séries de Dirichlet ainsi que deux exercices (l'un porte sur une sous-famille dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$, l'autre sur le logarithme complexe).

La partie **II** étudie d'abord une variante de l'équation fonctionnelle de Cauchy, puis démontre le théorème taubérien de Karamata. L'analyse réelle, les calculs d'ensembles et de bornes supérieures, des résultats de densité et les techniques d'estimation y sont omniprésents.

La partie **III** approfondit le thème du calcul intégral, d'abord par l'étude de la transformée de Mellin : les intégrales à paramètres et la transformation de Fourier ainsi que le prolongement analytique y jouent un rôle prépondérant. Elle se termine par une application à la théorie des distributions, indépendante du reste du texte.

La partie **IV** est consacrée aux propriétés de la fonction zeta en la variable réelle, d'abord le produit eulérien prouvé par voie probabiliste, puis une estimation du logarithme de la fonction ζ au voisinage du point 1. Ces estimations sont ensuite étendues au plan complexe et affinées lors de la difficile partie **V**, qui est le cœur technique de la démonstration du théorème des nombres premiers, laquelle est finalisée en partie **VI**, grâce en particulier au théorème taubérien de Karamata établi en partie **II**.

Nous recommandons la lecture du livre de Choimet-Queffélec [3] en particulier pour son chapitre sur les théorèmes taubériens, [2] pour une exposition de la méthode de Karamata ; les livres de Davenport [4], de Jameson [6], [8] pour une initiation à la théorie analytique des nombres avant d'aborder ceux de Tenenbaum [7] et d'Iwaniec-Kowalski [5], références incontournables de la théorie analytique des nombres moderne (en incluant l'étude des formes modulaires pour ce dernier).

Bibliographie

[1] M. Baran : *A Karamata Method I. Elementary Properties and Applications.* Canadian Mathematical Bulletin, 34(2), 147-157, 1991 doi :10.4153/CMB-1991-025-5

[2] N.H. Bingham, C.M. Goldies & J.L. Teugels : *Regular Variation*, Encyclopedia of mathematics and its applications 27, Cambridge University Press 1987.

[3] D. Choimet, H. Queffélec : *Analyse mathématique : grands théorèmes du vingtième siècle*, Paris : Calvage & Mounet, 2009.

[4] H. Davenport, *Multiplicative number theory.* 3rd ed. New York, NY : Springer, 2000.

[5] H. Iwaniec, E. Kowalski : *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications 53, American Mathematical Society, Providence RI, 2004.

[6] G. J. O. Jameson, *The prime number theorem.* Cambridge University Press, 2003.

[7] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* 2ème éd. Paris : Société Mathématique de France, 1995.

[8] E.C Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford science publications, Clarendon Press 1986.

Remarques générales sur les copies.

Le sujet d'Analyse et Probabilités était très long. Cela s'explique par l'objectif (ambitieux) fixé initialement par le texte et la nécessité de tester le candidat sur des thèmes variés, tout en demeurant progressif.

Il n'était pas nécessaire de s'avancer très loin dans le sujet pour obtenir une note tout à fait convenable. Le jury apprécie les copies qui n'esquivent pas les difficultés pour se concentrer uniquement sur les questions les plus faciles du sujet. Les premières parties permettaient d'évaluer la solidité des connaissances et la maîtrise des thèmes élémentaires. Une rédaction précise, efficace et soignée y est particulièrement attendue.

Un candidat à l'Agrégation Externe de Mathématiques doit faire un effort particulier dans la rédaction : un futur professeur se doit d'avoir des qualités pédagogiques, et d'être soucieux d'être compris du lecteur. Pour autant, il n'est pas nécessaire d'écrire des paragraphes interminables : la clarté et la brièveté de l'argument facilitent la compréhension d'un raisonnement, par la mise en avant des arguments essentiels, et ce au bon moment, tout en libérant un temps précieux pour avancer efficacement dans le problème.

En début de copie en particulier, il est important de soigner sa rédaction afin d'établir un lien de confiance avec le correcteur. Le jury attend de la part du candidat qu'il montre comment il raisonne, qu'il explique ce qu'il fait, qu'il vérifie soigneusement les hypothèses d'un théorème qu'il utilise, ou qu'il les mentionne au moins lorsque la vérification est évidente, afin que le correcteur n'ait aucun doute de la démarche du candidat.

D'un point de vue technique, le jury a noté des progrès importants de la part des candidats concernant la convergence des intégrales et des séries. Cette session, le jury a lu beaucoup moins de démonstrations de l'intégrabilité sur $[a, +\infty[$ d'une fonction f continue par morceaux en prouvant l'existence d'un M tel que $|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t| \leqslant M$. Les candidats dans leur grande majorité travaillent sur la fonction f elle même, et ont le bon réflexe de comparer la quantité $|f(x)|$ à des fonctions de référence. Il en va de même pour la convergence des séries numériques. Il y a néanmoins des erreurs techniques à déplorer : les plus marquantes sont détaillées ci-dessous.

En revanche, le jury a été très surpris du faible nombre de candidats traitant correctement un certain nombre des toutes premières questions. En particulier, trois difficultés ont attiré son attention :
• l'intégration par parties impropre, faite sans aucune précaution de convergence,
• la dérivation terme à terme d'une série de fonctions, par «linéarité», comme s'il s'agissait d'une somme finie, ou en invoquant seulement la convergence uniforme de la série,
• l'encadrement série-intégrale, tout simplement ignoré (ou énoncé sous la forme d'une égalité entre somme d'une série et d'une intégrale).
Il s'agit là de questions de cours élémentaires, traitées en L2, dont la maîtrise est importante. Or plus de la moitié des candidats a été mise en grande difficulté par ces techniques.

Remarques individuelles sur les questions.

I-1) De nombreux candidats pensent qu'une fonction continue sur un intervalle est nécessairement intégrable ; beaucoup semblent ne pas avoir conscience que, pour la fonction proposée, il y a «un problème» en 0, et nombre d'entre eux ne semblent pas distinguer le fait qu'une fonction soit bien définie en un point de la continuité en ce point.

I-2a) Seul un tiers des copies a obtenu la totalité des points à cette question, et moins de la moitié des copies dépasse la moitié des points ! La propriété de linéarité de la dérivation ne permet pas de dériver terme à terme une somme *infinie*. On a même lu des preuves par holomorphie sur un intervalle de la droite réelle !

Le jury profite de cette occasion pour rappeler que la limite d'une suite de fonctions toutes de classe C^1 peut très bien ne pas être dérivable. Ainsi, il existe des fonctions continues sur $[0, 1]$ mais dérivables en aucun point : une telle fonction est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Enfin, le jury attendait une démonstration de la convergence normale de la série des dérivées. Entre les copies affirmant une convergence normale sur $]1, +\infty[$, celles invoquant une convergence uniforme sans la justifier entièrement, le jury a lu bien peu de copies proposant une solution complète de cette question.

I-2b) Seul 65% des copies aborde cette question, et parmi celles qui l'ont fait seule la moitié obtient la moitié des points !

I-3a) De nombreuses copies ont produit des graphes très brouillons, ce qui est étonnant de la part de candidats à un concours d'enseignement. Seule 52% des copies ont obtenu la moitié des points.

Quelques candidats ont pris trop de temps et se sont lancés dans de longues études de fonctions (qui n'étaient pas demandées). Signalons en passant qu'en un point où sa dérivée s'annule une fonction n'atteint pas forcément un extrémum : l'étude du signe d'une dérivée ne peut se faire que par la résolution d'une inéquation.

I-3d) Le calcul de $\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)$ a été peu réussi : beaucoup d'intégrations par parties peu utiles qui se concluent confusément en faisant comme si α était entier.

I-4a) Cette question n'a pas été très bien réussie. Dans les copies qui avaient repéré que $\psi(x) = \psi(\lfloor x \rfloor)$ (ce qui n'était pas toujours explicitement écrit), la suite du raisonnement a été très rarement rédigée correctement avec des passages de x à n mystérieux, et donc peu convaincants.

I-4b, 4d) Il a été très rarement mentionné dans l'argumentation que si une limite existe, elle est égale à la limite inférieure. Dans une fraction significative de copies, les candidats présupposent l'existence de la limite de $x^{-1}\pi(x)\log x$.

I-5b) Les candidats ayant abordé cette question ont quasiment toujours eu l'idée des intégrations par parties. En revanche la gestion des crochets a été souvent mal traitée. De nombreuses copies invoquent le fait qu'une fonction intégrable tend nécessairement vers 0 en $\pm\infty$: les fonctions serpents ou en dents de scie, non bornées en $+\infty$, fournissent des contrexemples qu'un candidat à l'Agrégation se doit de connaître.

I-6c) Environ 40% des copies ont abordé cette question et parmi celles-ci 50 % ont eu plus que la moyenne.

Une fraction significative de copies ne donne aucun argument. Une bonne part de réponses correctes utilise l'argument de la convergence normale pour intervertir somme et limite mais sous une forme parfois incantatoire : les nombreux candidats ayant raisonné à la question précédente avec des compacts inclus dans $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ n'ont en fait pas démontré la convergence normale sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ dont on a besoin ici. Invoquer un théorème sans le citer et surtout sans se donner la peine d'en vérifier ses hypothèses ne rapporte pas de point !

I-6d) Le jury regrette l'oubli quasi-systématique des hypothèses (connexité, point d'accumulation) dans l'application du principe des zéros isolés.

II-1) Cette question a été abordée par 52% des copies ; parmi celles-ci 50% ont eu plus de la moyenne.

De nombreuses copies parviennent à montrer la $\mathbf{Q}$-linéarité (en oubliant souvent le cas des entiers négatifs cependant), mais de nombreuses copies invoquent, pour le passage aux réels par densité, une continuité qui n'est pas supposée.

II-2a) La non-vacuité de $J(x)$ a souvent été justifiée correctement. En revanche le caractère minoré de $J(x)$ a donné lieu a des erreurs (parfois de logique). Seulement $24,5\%$ des copies ont tous les points à cette question.

II-2b) La croissance de f a été dans l'ensemble bien traitée, ce qui est positif. En revanche la continuité à droite a été rarement justifiée correctement. Cela a souvent donné lieu à des rédactions très fautives montrant le manque d'aisance des candidats avec la notion de borne inférieure.

II-2c) Trop de copies manquent de soin logique pour montrer l'égalité des ensembles.

II-3b) Pour prouver l'existence de h, des copies donnent une formule dont la bonne définition est très souvent éludée. Parfois la propriété de multiplicativité est également oubliée. L'unicité n'a pas toujours été traitée. Un raisonnement par «analyse-synthèse» était tout à fait envisageable.

III-1d Un raisonnement complet n'apparaît que dans les bonnes copies. Les candidats n'ont souvent pas conscience de ne montrer que l'inclusion $D_\varphi \subset]0, \infty[$ et non l'égalité.

III-1e La preuve suggérée par l'énoncé n'a été fournie que par les bonnes copies. Il est étonnant que nombre de copies procèdent par une récurrence initialisée grâce à **I-1)** sans remarquer que le paramètre est désormais complexe.

IV-1 La sigma-additivité n'a pas toujours été invoquée et certains candidats traduisent mal la définition de l'indépendance.

Moins de 5% des copies ont traité des questions ultérieures.

4.3 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilité

Corrigé de l'épreuve d'Analyse-Probabilités 2022.

Partie I.

I-1 La fonction $f : x \mapsto e^{-x}x^{\sigma-1}$ est d'abord continue par morceaux sur $\mathbf{R}_+^*$, donc localement intégrable. On a
- $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\sigma-1}$ qui est intégrable en 0 car $\sigma - 1 > -1$ et
- $f(x) = \mathrm{o}_{x\to+\infty}(1/x^2)$ et $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable en $+\infty$.

Ces deux estimations assurent l'intégrabilité de f sur $\mathbf{R}_+^*$.
Variante : On peut dire également que f est mesurable sur $\mathbf{R}_+^*$, que $|f(x)| \leqslant x^{\sigma-1}$ pour $x \in]0,1]$, $|f(x)| \leqslant C/x^2$ avec $C = \sup_{x\in[1,+\infty[} x^{\sigma+1}e^{-x}$ si $x \geqslant 1$, ce qui donne $|f(x)| \leqslant x^{\sigma-1}\mathbb{1}_{]0,1]}(x) + C\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)/x^2$ et par majoration f est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Une intégration par parties impropre, obtenue (à bon droit par convergence du crochet par croissance comparée en $+\infty$, ou tout simplement par la convergence des deux intégrales apparaissant de part et d'autre) en dérivant la fonction $x \mapsto x^\sigma$ qui est C^1 et en primitivant la fonction $x \mapsto e^{-x}$ qui est C^0 sur $\mathbf{R}_+^*$, fournit la relation $\Gamma(\sigma+1) = \sigma\Gamma(\sigma)$.
La fonction f est en outre positive et continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Si l'intégrale $\int_{\mathbf{R}_+^*} f$ était nulle, on aurait $f = 0$ partout, ce qui est absurde puisque f est en fait partout > 0. D'où $\Gamma(\sigma) > 0$ pour tout σ.

Variante : On peut dire également que f est mesurable et positive, et que l'hypothèse $\int_{\mathbf{R}_+^*} f = 0$ entraînerait f nulle presque partout, ce qui n'est pas le cas.

I-2a Posons $u_n(\sigma) = n^{-\sigma}$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, u_n est C^1 sur $]1, +\infty[$ par composition vu que $u_n(\sigma) = \exp(-\sigma \log n)$,
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ comme cela est rappelé (règle dite de Riemann relative aux séries numériques),
- pour tout $\sigma \in [a, b] \subset]1, +\infty[$, on a $|u_n'(x)| = \log n . n^{-\sigma} \leqslant \log n . n^{-a} = \mathrm{o}(n^{-(a+1)/2})$, terme général (indépendant de x) d'une série absolument convergente. On a donc convergence normale, donc uniforme, de $\sum u_n'$ sur tous les segments de $]1, +\infty[$.

Ces trois propriétés assurent la préservation du caractère C^1 pour la somme, ainsi que la relation, pour tout $\sigma > 1$, $\zeta'(\sigma) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log n . n^{-\sigma}$.
Par positivité des termes, on a $\zeta(\sigma) \geqslant u_1(\sigma) = 1$, donc ζ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

I-2b Notons, pour tout $t \geqslant 1$ et $\sigma > 0$, $f(t) = t^{-\sigma-1}$
La fonction f est décroissante et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ de sorte que pour tout $n \geqslant 1$ on a l'encadrement

$$\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma n^\sigma} = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma n^\sigma}$$

En faisant tendre n vers l'infini, par conservation des inégalités larges il vient

$$\frac{1}{\sigma} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \zeta(1+\sigma) \leqslant 1 + \frac{1}{\sigma}$$

En multipliant cet encadrement par σ qui est > 0 on obtient l'équivalent souhaité $\zeta(\sigma+1) \underset{\sigma \to 0}{\sim} 1/\sigma$.
Remarque : On peut dire également que la série $\sum f(k)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ sont de même nature, par décroissance et positivité de f, donc en l'occurrence convergente puisque la série l'est, d'où l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \zeta(1+\sigma) \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f.$$

On finit en calculant l'intégrale (qui vaut $1/\sigma$) et on conclut comme précédemment. Cette variante évite le passage à la limite sur n, mais il ne faut pas oublier de justifier correctement l'existence des objets présents dans l'inégalité.

I-3a Il était attendu (ou espéré) de voir distinctement sur les copies le comportement en les bornes, ainsi que les éventuelles tangentes (horizontales, verticales) en 0 et en 1.

I-3b • On suppose que $\alpha > 1$. On observe que $\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{2(\alpha-1)}} \log 1/t = 0$. Donc la fonction $t \in]0, 1] \mapsto \sqrt{t}(-\log t)^{\alpha-1}$ est continue positive et prolongeable par continuité à droite en 0 : le prolongement

est une fonction continue positive sur $[0,1]$: elle est majorée. On note alors c_α sa borne supérieure et on obtient l'inégalité voulue.
• Si $\alpha=1$, on a $\sqrt{t}(-\log t)^{\alpha-1}=\sqrt{t}$ et il suffit de choisir $c_1=1$.
• On suppose $\alpha\in]0,1[$. On observe d'une part que $\lim_{t\to0^+}(1-t)^{1-\alpha}(-\log t)^{\alpha-1}=0$. D'autre part, $\lim_{t\to1-}(1-t)^{1-\alpha}(-\log t)^{\alpha-1}=1$, car $\log t/(1-t)$ tend vers la dérivée de log en 1 lorsque $t\to 1-$. Donc la fonction $t\in]0,1[\mapsto(1-t)^{1-\alpha}(-\log t)^{\alpha-1}$ est continue positive prolongeable par continuité à droite en 0 et à gauche en 1 : le prolongement est une fonction continue positive sur $[0,1]$: elle est donc majorée. On note alors c'_α sa borne supérieure et on obtient l'inégalité voulue.

I-3c Notons $g(t)=f(t)(-\log t)^{\alpha-1}$.
• La fonction g est continue par morceaux sur $]0,1[$ (donc localement intégrable).
• Si $\alpha\geqslant 1$, on a la majoration $|g(t)|\leqslant\|f\|_\infty c_\alpha/\sqrt{t}$. La fonction $t\mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ (sa primitive $t\mapsto\sqrt{t}$ a une limite finie en 0) et donc g l'est aussi par majoration.
• Si $\alpha\in]0,1[$, on a cette fois la majoration $|g(t)|\leqslant\|f\|_\infty c'_\alpha(1-t)^{-1+\alpha}$ et l'intégrabilité de $t\mapsto(1-t)^{1-\alpha}$ sur $[0,1[$ (sa primitive $t\mapsto-(1-t)^{-\alpha}/\alpha$ a une limite finie en 1^-) assure celle de g.
Variante proposée par un candidat : on procède au changement de variable $t=e^{-u}$ qui donne (dans $\overline{\mathbf{R}}_+$)

$$\int_0^1|f(t)(-\log t)^{\alpha-1}|\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}|f(e^{-u}))|u^{\alpha-1}e^{-u}\mathrm{d}u.$$

L'intégrande du membre de droite se majore en $\|f\|_{\infty,[0,1]}u^{\alpha-1}e^{-u}$ qui est intégrable par la question **I-1)**.

I-3d • La linéarité de Λ_α vient de la linéarité de l'intégrale (sur l'espace des fonctions intégrables).
• On fixe $b\in]0,1/2[$. Par le changement de variable $s=-\log t$ qui est bien un C^1-difféomorphisme, on obtient

$$\int_b^{1-b}t^p(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=\int_{-\log(1-b)}^{-\log b}e^{-(p+1)s}s^{\alpha-1}\mathrm{d}s\,.$$

En effectuant le changement de variable $r=(p+1)s$, on obtient ensuite

$$\int_b^{1-b}t^p(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=(p+1)^{-\alpha}\int_{-(p+1)\log(1-b)}^{-(p+1)\log b}e^{-r}r^{\alpha-1}\mathrm{d}r$$

et en faisant tendre b vers 0, on obtient par les questions **3c)** et **1)**

$$\int_0^1t^p(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=(p+1)^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-r}r^{\alpha-1}\mathrm{d}r=(p+1)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\,.$$

Donc $\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)=(p+1)^{-\alpha}$.
Remarque : Il est également possible de travailler directement sur l'intégrale $\int_0^1 t^p(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$, à condition de préciser qu'un changement de variable C^1 bijectif préserve la convergence des intégrales (ou l'intégrabilité).

I-3e Pour tout $t\in]0,1[$, on a $|f(t)(-\log t)^{\alpha-1}|\leqslant\|f\|_\infty(-\log t)^{\alpha-1}$. Donc par l'inégalité triangulaire et **3d**, on a

$$|\Lambda_\alpha(f)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1|f(t)(-\log t)^{\alpha-1}|\mathrm{d}t\leqslant\frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(-\log t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t=\|f\|_\infty\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_0)=\|f\|_\infty.$$

I-3f On prend f_ε continue, nulle sur $[0, e^{-1}]$, coïncidant avec J sur l'intervalle $[e^{-1}+\varepsilon, 1]$ et affine sur $[e^{-1}, e^{-1}+\varepsilon]$; on choisit g_ε continue, nulle sur $[0, e^{-1}-\varepsilon]$, coïncidant avec J sur l'intervalle $[e^{-1}, 1]$ et affine sur $[e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}]$.

Explicitement (mais dans ce cas, un dessin clair vaut mieux qu'une formule) : pour tout $t \in [0, e^{-1}-\varepsilon]$, on pose $h_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) = J(t) = 0$. Pour tout $t \in [e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}]$, on pose $f_\varepsilon(t) = 0$ et $h_\varepsilon(t) = e\varepsilon^{-1}(t - e^{-1} + \varepsilon)$. Pour tout $t \in [e^{-1}, e^{-1}+\varepsilon]$, on pose $h_\varepsilon(t) = J(t) = 1/t$ et $f_\varepsilon(t) = J(e^{-1}+\varepsilon)\varepsilon^{-1}(t - e^{-1})$. Enfin pour tout $t \in [e^{-1}+\varepsilon, 1]$, on pose $h_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) = J(t) = 1/t$.

I-3g On observe que $e^{-1} - \varepsilon > e^{-2}$ et comme $e^{-1/2} - e^{-1} > e^{-1} - e^{-2} > \varepsilon$, on a $e^{-1} + \varepsilon < e^{-1/2}$. Autrement dit, si $\varepsilon \in]0, e^{-1} - e^{-2}[$ et si $t \in [e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}+\varepsilon]$, alors $e^{-2} < t < e^{-1/2}$ et donc $1/2 < -\log t < 2$.

Si $\alpha \geqslant 1$, $y \mapsto y^{\alpha-1}$ croît et donc $(-\log t)^{\alpha-1} \leqslant 2^{\alpha-1} \leqslant 2^{\alpha+1}$. Si $\alpha \in]0,1[$, $y \mapsto y^{\alpha-1}$ decroît et donc $(-\log t)^{\alpha-1} \leqslant (1/2)^{\alpha-1} = 2^{1-\alpha} \leqslant 2^{\alpha+1}$. Dans les deux cas on a $(-\log t)^{\alpha-1} \leqslant 2^{\alpha+1}$.

Par positivité de $t \in]0,1[\longmapsto (-\log t)^{\alpha-1}$, la forme linéaire Λ_α est positive et comme $f \leqslant J \leqslant h_\varepsilon \leqslant f_\varepsilon + e\mathbf{1}_{[e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}+\varepsilon]}$, on a grâce à **I-3c)**

$$\Lambda_\alpha(f_\varepsilon) \leqslant \Lambda_\alpha(J) \leqslant \Lambda_\alpha(h_\varepsilon) \leqslant \Lambda_\alpha(f_\varepsilon) + \frac{e2^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \mathbf{1}_{[e^{-1}-\varepsilon, e^{-1}+\varepsilon]}(t)\,\mathrm{d}t = \Lambda_\alpha(f_\varepsilon) + \frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\,,$$

ce qui est le résultat souhaité.

I-4a On observe que $\psi(x) = \psi(\lfloor x \rfloor)$, ainsi $\frac{\psi(x)}{x} = \frac{\psi(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor}\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et on conclut grâce à l'encadrement $1 - 1/x = \frac{x-1}{x} \leqslant \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$ que $\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ tend vers 1 et donc que $\psi(x)/x$ tend vers 1 quand $x \to +\infty$.

I-4b Soit $p \in \mathscr{P}$. On note que $p^k \leqslant x$ si et seulement si $k \leqslant \log_p x$. Donc $\#\big([0,x] \cap \{p^k ; k \in \mathbf{N}^*\}\big) = \lfloor \log_p x \rfloor$. Par définition, pour tout $p \in \mathscr{P}$, $\{n \in [1,x] \cap \mathbf{N} : \Lambda(n) = \log p\} = [0,x] \cap \{p^k ; k \in \mathbf{N}^*\}$ donc

$$\psi(x) = \sum_{p \in \mathscr{P}(x)} \log p \,.\, \#\big(\{n \in [1,x] \cap \mathbf{N} : \Lambda(n) = \log p\}\big) = \sum_{p \in \mathscr{P}(x)} \lfloor \log_p x \rfloor \log p\,.$$

Puisque $\lfloor \log_p x \rfloor \log p \leqslant \log x$, l'égalité précédente entraîne $\psi(x) \leqslant \pi(x)\log x$ et donc $x^{-1}\pi(x)\log x \geqslant \psi(x)/x$. La conservation des inégalités larges par passage à la limite inférieure implique que $\liminf_{x\to+\infty}(x^{-1}\pi(x)\log x) \geqslant \liminf_{x\to+\infty} \psi(x)/x = 1$ par la question précédente (quand la limite existe, elle est égale à la limite inférieure).

I-4c Soit $\beta \in]0,1[$. On observe que si $x \geqslant p \geqslant x^\beta$, alors d'une part $\log p \geqslant \log x^\beta$ et d'autre part $\log_p x \geqslant 1$, donc $\lfloor \log_p x \rfloor \geqslant 1$. On en déduit

$$\psi(x) - \psi(x^\beta) \geqslant \sum_{p \in \mathscr{P}(x) \setminus \mathscr{P}(x^\beta)} \lfloor \log_p x \rfloor \log p \geqslant \#\big(\mathscr{P}(x) \setminus \mathscr{P}(x^\beta)\big)\log x^\beta.$$

Or d'une part $\#\big(\mathscr{P}(x) \setminus \mathscr{P}(x^\beta)\big) = \pi(x) - \pi(x^\beta)$ et d'autre part, il est clair que $\pi(x^\beta) \leqslant x^\beta$. Donc

$$\psi(x) \geqslant \psi(x) - \psi(x^\beta) \geqslant (\pi(x) - \pi(x^\beta))\log x^\beta \geqslant (\pi(x) - x^\beta)\beta\log x\,,$$

qui implique l'inégalité voulue.

En particulier on a

$$x^{-1}\pi(x)\log x \leqslant \beta^{-1}x^{-1}\psi(x) + x^{-(1-\beta)}\log x$$

on passe à la limite supérieure, qui est sous-additive et conserve les inégalités larges :

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leqslant \limsup_{x\to+\infty} \left(\beta^{-1}\frac{\psi(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{1-\beta}}\right) \leqslant \beta^{-1} \limsup_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} + \limsup_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{1-\beta}} = \beta^{-1}$$

par ($\mathcal{E}q_2$) puisque la limite supérieure coïncide avec la limite quand celle-ci existe.

I-4d La question précédente donne en faisant tendre β vers 1 : $\limsup_{x\to+\infty} x^{-1}\pi(x)\log x \leqslant 1$. Combiné à la question **4b)**, cela entraîne que $1 \leqslant \limsup_{x\to+\infty} x^{-1}\pi(x)\log x \leqslant \liminf_{x\to+\infty} x^{-1}\pi(x)\log x \leqslant 1$ donc que les limites supérieures et inférieures sont toutes deux égales à 1, donc que la limite quand $x \to +\infty$ de $x^{-1}\pi(x)\log x$ existe et vaut 1. D'où ($\mathcal{E}q_1$).

I-5a Par hypothèse $C = \sup_{t\in\mathbf{R}} t^2\big(|f(t)|+|f'(t)|+|f''(t)|\big)$ est une quantité finie. Pour tout $i = 0, 1, 2$, et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $|f^{(i)}(t)| \leqslant \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)|f^{(i)}(t)| + Ct^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|t|)$. Le membre de droite est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, d'où l'intégrabilité par majoration de la fonction mesurable (ou continue par morceaux) $|f^{(i)}|$.

Variante : Il est également correct de dire que les fonctions $f^{(i)}$ étant continues par morceaux sur $\mathbf{R}$, leur intégrabilité est assurée par l'estimation $f^{(i)} = \mathrm{O}_{|t|\to+\infty}(1/t^2)$, selon la règle dite de Riemann.

I-5b On fixe $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $e^{-2i\pi xt}f''(t) - 2i\pi x e^{-2i\pi xt}f'(t) = (e^{-2i\pi xt}f'(t))'$. Donc pour tout réel $y > 0$, on a

$$\int_{-y}^{y} e^{-2i\pi xt}f''(t)\mathrm{d}t - 2i\pi x\int_{-y}^{y} e^{-2i\pi xt}f'(t)\mathrm{d}t = e^{-2i\pi xy}f'(y) - e^{2i\pi xy}f'(-y)\ .$$

L'hypothèse sur f implique que $f'(y)$ et $f'(-y)$ tendent vers 0 lorsque $y \to +\infty$, puisque dominées par $1/y^2$. Comme f' et f'' sont intégrables leur transformée de Fourier est bien définie et en faisant $y \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\widehat{(f'')}(x) - 2i\pi x\widehat{(f')}(x) = 0\ .$$

On raisonne de même avec f' pour obtenir $\widehat{(f')}(x) - 2i\pi x\widehat{f}(x) = 0$. Donc $\widehat{(f'')}(x) = -4\pi^2x^2\widehat{f}(x)$.

I-5c On pose $c = \int_{-\infty}^{+\infty}|f''(t)|\mathrm{d}t$ qui est donc une quantité finie par **5a)**. La question précédente et l'inégalité triangulaire impliquent pour tout $x \in \mathbf{R}$, que

$$4\pi^2x^2|\widehat{f}(x)| = \big|\widehat{(f'')}(x)\big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|f''(t)e^{-2i\pi xt}|\mathrm{d}t = c\ .$$

Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $|\widehat{f}(x)| \leqslant \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)|\widehat{f}(x)| + c(2\pi x)^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)$. Comme $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbf{R}$ elle est intégrable sur $[-1,1]$. La fonction $x \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)|\widehat{f}(x)| + c(2\pi x)^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)$ est donc intégrable sur $\mathbf{R}$ et il en est de même pour $\widehat{f}$.

Variante : On peut également dire que $\widehat{f}$ étant continue, elle est localement intégrable et son intégrabilité sur $\mathbf{R}$ se déduit de l'estimation $\widehat{f}(x) = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(1/x^2)$ par la régle de Riemann.

I-6a Soit $s \in \mathbf{H}_{\sigma_0}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|a_n n^{-s}| \leqslant |a_n|n^{-\mathrm{Re}(s)} \leqslant |a_n|n^{-\sigma_0}$. Cela montre que la série de terme général $(a_n n^{-s})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.

I-6b On a $\sup_{s\in\mathbf{H}_{\sigma_0}} |a_n n^{-s}| \leqslant |a_n| n^{-\sigma_0}$. Par conséquent la série de fonctions de terme général $s \mapsto a_n n^{-s}$, $n \geqslant 1$, est normalement convergente sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ et a fortiori sur tout compact de $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. Par un résultat rappelé en début de problème, cela implique que $\varphi_{\mathbf{a}}$ est holomorphe sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$.

I-6c Notons $u_n(\sigma) = a_n n^{-\sigma}$ pour $n \geqslant 1$ et $\sigma \geqslant \sigma_0$. On a
- À $n \geqslant 1$ fixé, $\lim_{\sigma\to+\infty} u_n(\sigma) = \ell_n = 0$ si $n \geqslant 2$, $= a_1$ si $n = 1$,
- $\sum u_n$ converge uniformément, car normalement, au voisinage de $+\infty$ (par la majoration $|u_n(\sigma)| \leqslant |a_n| n^{-\sigma_0}$ de la question précédente).

Ainsi, le théorème de la double limite assure la convergence de $\sum \ell_n$, qui est ici évidente, et le fait que $\lim_{\sigma\to+\infty} \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n$, soit ici $\lim_{\sigma\to+\infty} \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a_1$ comme voulu.

Variante 1 : En s'appuyant sur le théorème de convergence dominée. En notant μ la mesure de comptage sur $\mathbf{N}^*$ et $f(\sigma, t) = u_t(\sigma)$ pour $t \in \mathbf{N}^*$, on peut en effet écrire

$$\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = \int_{\mathbf{N}^*} f(\sigma, t)\mathrm{d}\mu(t)$$

Comme à $t \in \mathbf{N}^*$ fixé, on a $\lim_{\sigma\to+\infty} f(\sigma, t) = a_1$ si $t = 1$, 0 si $t \geqslant 2$ et qu'on a la domination $|f(t, \sigma)| \leqslant h(t) = |a_t| t^{-\sigma_0}$ dès que $\sigma \geqslant \sigma_0$ avec h intégrable sur $\mathbf{N}^*$ (par hypothèse faite sur σ_0), on a par théorème de convergence dominée

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \int_{\mathbf{N}^*} f(\sigma, t)\mathrm{d}\mu(t) = a_1$$

Variante 2 : on note que pour tout $n \geqslant 2$, on a $|a_n| n^{-\sigma} \leqslant |a_n| n^{-\sigma_0} 2^{-\sigma+\sigma_0}$ par décroissance de $n \mapsto n^{-\sigma+\sigma_0}$, ce qui donne par inégalité triangulaire

$$|\varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) - a_1| \leqslant 2^{-\sigma+\sigma_0} \sum_{n\geqslant 2} |a_n| n^{-\sigma_0} = \mathrm{O}_{\sigma\to+\infty}(2^{-\sigma})$$

d'où le résultat.

Sous l'hypothèse que les a_k sont nuls pour $k = 1, \ldots, n_0 - 1$, on pose $v_n(\sigma) = a_n (n/n_0)^{-\sigma}$ pour $n \geqslant n_0$ et $\sigma \geqslant \sigma_0$. Comme ci-dessus :
- à $n \geqslant 1$ fixé, $\lim_{\sigma\to+\infty} v_n(\sigma) = \ell_n = 0$ si $n \geqslant n_0 + 1$, $= a_{n_0}$ si $n = n_0$,
- $\sum u_n$ converge uniformément, car normalement, au voisinage de $+\infty$ (par la majoration $|v_n(\sigma)| \leqslant |a_n| (n/n_0)^{-\sigma_0}$ cette fois).

On conclut par le même théorème que $\lim_{\sigma\to+\infty} n_0^{\sigma} \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a_{n_0}$.

I-6d Comme $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ est un ouvert connexe et qu'un ouvert non vide possède un point d'accumulation au moins (chacun de ses points !), le principe des zéros isolés appliqué à la fonction holomorphe $\varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}}$ implique que $\varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}} = 0$. On pose $c_n = b_n - a_n$ et $\mathbf{c} = (c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Cela implique que $\varphi_{\mathbf{c}} = \varphi_{\mathbf{b}} - \varphi_{\mathbf{a}}$ est identiquement nulle sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. La question précédente montre alors que $c_1 = \lim_{\sigma\to+\infty} \varphi_{\mathbf{a}'}(\sigma) = 0$.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $c_1 = \ldots = c_{n_0-1} = 0$. La question précédente implique que $c_{n_0} = \lim_{\sigma\to+\infty} n_0^{\sigma} \varphi_{\mathbf{c}}(\sigma) = 0$.

Cela montre, par récurrence, que $c_n = 0$ c'est-à-dire $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

I-7a On a $|e_n(k)|^2 = n^{-2}$ et donc $\sum_{n\geqslant 1} |e_n(k)|^2 = \sum_{n\geqslant 1} n^{-2} < +\infty$.

I-7b Pour tout $\sigma_0 > 1/2$, on a par Cauchy-Schwarz

$$\sum_{n\geqslant 1} |a_n| n^{-\sigma_0} \leqslant \Big(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n\geqslant 1} n^{-2\sigma_0}\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Par les questions précédentes, la série de Dirichlet $\varphi_{\mathbf{a}}$ de $\mathbf{a}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. Comme σ_0 peut être choisi arbitrairement proche de $1/2$, $\varphi_{\mathbf{a}}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbf{H}_{1/2} = \bigcup_{\sigma_0>1/2} \mathbf{H}_{\sigma_0}$.
Variante proposée par un candidat : on utilise l'inégalité $|xy| \leqslant (x^2+y^2)/2$ pour tous x, y réels, avec $x = |a_n|$ et $y = n^{-\sigma_0}$. On en tire la majoration $|a_n|n^{-\sigma_0} \leqslant |a_n|^2/2 + n^{-2\sigma_0}/2$ et on conclut par critère de majoration.

I-7c L'hypothèse implique en particulier que $(\mathbf{a}, \mathbf{e}(k)) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = (\mathbf{e}(k), \mathbf{a}) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-1+\frac{1}{k}i} = \varphi_{\mathbf{a}}\big(1 - \tfrac{1}{k}i\big)\ .$$

Donc $\varphi_{\mathbf{a}}$, holomorphe sur $\mathbf{H}_{1/2}$, s'annule sur l'ensemble infini $\{1 - \frac{1}{k}i\,;\, k \in \mathbf{N}^*\}$ de points admettant $1 \in \mathbf{H}_{1/2}$ comme point d'accumulation. Le principe des zéros isolés implique que $\varphi_{\mathbf{a}}$ est identiquement nulle et la question **6d)** entraîne que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On a montré que si $\mathbf{a}$ est orthogonale à V dans $\ell_2(\mathbf{N}^*)$ alors $\mathbf{a}$ est (identiquement) nulle. Ainsi V est un sous-espace dense de $\ell_2(\mathbf{N}^*)$, puisque celui-ci est un espace de Hilbert.

I-8 Soit un réel $\sigma_0 > 1$. Puisque la série de terme général $(n^{-\sigma_0})_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbf{R}_+$ (sa somme est $\zeta(\sigma_0)$), la question **6b)** montre que ζ se prolonge en la fonction holomorphe $s \in \mathbf{H}_{\sigma_0} \mapsto \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$. Si une autre fonction $g : \mathbf{H}_{\sigma_0} \to \mathbf{C}$ prolongeait ζ, alors $g - \zeta$ s'annulerait sur $]\sigma_0, +\infty[$ et comme $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ est connexe et qu'un intervalle non trivial possède au moins un point d'accumulation, le principe des zéros isolés impliquerait que $g-\zeta$ est nulle sur $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. Par conséquent, le prolongement de ζ à $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ est unique. Comme σ_0 peut être pris arbitrairement proche de 1, cela montre de même que ζ se prolonge de manière unique par une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_1 = \bigcup_{\sigma_0>1} \mathbf{H}_{\sigma_0}$.
Soit un réel $\sigma_0 > 1$. On observe que $|\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(n) n^{-\sigma_0}| \leqslant n^{-\sigma_0}$ donc $s \in \mathbf{H}_{\sigma_0} \mapsto \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}\mathbf{1}_{\mathscr{P}(n)} = \sum_{n\geqslant 1} p_n^{-s}$ définit bien une fonction holomorphe par la question **6b)**.
On observe ensuite que $\lim_{n\to+\infty} n^{-(\sigma_0-1)/2}\log n = 0$. Donc $C = \max_{n\geqslant 1} n^{-(\sigma_0-1)/2}\log n$ est une quantité finie. On a donc $\Lambda(n)n^{-\sigma_0} \leqslant n^{-\sigma_0}\log n \leqslant Cn^{-(1+\sigma_0)/2}$ et la série de terme général $(\Lambda(n)n^{-\sigma_0})_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbf{R}_+$. Par conséquent $s \in \mathbf{H}_{\sigma_0} \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \Lambda(n) n^{-s}$ définit bien une fonction holomorphe, toujours par la question **6b)**. Comme σ_0 peut être choisi arbitrairement proche de 1, Z et Φ sont bien définies et holomorphes sur $\mathbf{H}_1 = \bigcup_{\sigma_0>1} \mathbf{H}_{\sigma_0}$.

I-9a La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbf{C}$. Par composition des fonctions holomorphes, h est holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Par ailleurs, la fonction identité sur $\mathbf{C}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et donc en particulier sur l'ouvert $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Sur $\mathbf{R}_+^*$, h et l'identité coïncident. Puisque $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ est connexe, par le principe des zéros isolés, h et l'identité coïncident donc sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$.

I-9b Soit $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Il existe $\theta_0 \in \mathbf{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta_0}$. On a

$$|z|e^{i\theta_0} = z = \exp(\log z) = \exp(\mathrm{Re}\,(\log z))\exp(i\mathrm{Im}\,(\log z))\ .$$

En prenant le module, on obtient $|z| = \exp(\mathrm{Re}\,(\log z))$ et comme sur $\mathbf{R}_+^*$ la fonction logarithme (népérien) est la fonction réciproque de l'exponentielle, on obtient $\log |z| = \mathrm{Re}\,(\log z)$.
De même on a $z/|z| = e^{i\theta_0} = \exp(i\mathrm{Im}\,(\log z))$.

I-9c Comme $|z| > 0$, on a $|z|e^{i\theta} \in \mathbf{R}_- \Leftrightarrow e^{i\theta} \in \mathbf{R}_- \Leftrightarrow \theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$.
Comme on suppose $\theta \in]-\pi,\pi[$, on a $|z|e^{i\theta} \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, donc $\log(|z|e^{i\theta})$ est bien définie et f également.
Le résultat de la question précédente donne

$$\exp\left(i\mathrm{Im}(\log(|z|e^{i\theta}))\right) = |z|e^{i\theta}/||z|e^{i\theta}| = e^{i\theta}$$

et donc en faisant le quotient il vient $e^{if(\theta)} = 1$. Par conséquent $f(\theta) \in 2\pi\mathbf{Z}$.
Comme f est continue par composition d'applications continues, elle est constante car $2\pi\mathbf{Z}$ est discret. Or elle vaut 0 en 0. Donc f est nulle et donc pour pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, on a $\mathrm{Im}(\log(|z|e^{i\theta})) = \theta$.
En notant $\theta \in]-\pi,\pi]$ l'argument principal de z, on a $\theta \neq \pi$ puisque z n'est pas un réel négatif. Ce qui précède montre alors que $\mathrm{Im}(\log z) = \mathrm{Im}(\log(|z|e^{i\theta})) = \theta$, ce qui fournit comme voulu $\log z = \log(|z|) + i\arg(z)$.

I-9d On pose $z_1 = z_2 = e^{3i\pi/4}$. On a $z_1z_2 = e^{3i\pi/2} = -i = e^{-i\pi/2} \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Donc $\log z_1z_2 = -i\pi/2 \neq i3\pi/2 = \log z_1 + \log z_2$.

I-9e Soit $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. On pose $\theta = \mathrm{Im}(\log z)$. Ce qui précède montre que $-\pi/4 = \mathrm{Im}(\log z_0)$. Soit θ_1 l'unique réel de $]-\pi,\pi[$ tel que $\theta_0 + \theta - \theta_1 \in 2\pi\mathbf{Z}$. On a $zz_0 = |zz_0|e^{i\theta_1}$ et donc $\mathrm{Im}(\log(zz_0)) = \theta_1$, $\mathrm{Im}(\log z) = \theta$ et $\mathrm{Im}(\log z_0) = -\pi/4$. Donc on a $\log(z_0z) = \log z + \log z_0$ si et seulement si $\theta_1 = \theta - \frac{1}{4}\pi$, autrement dit si et seulement si $-\pi < \theta - \frac{1}{4}\pi < \pi$. Comme $\theta \in]-\pi,\pi[$, on a que $\log(z_0z) = \log z + \log z_0$ si et seulement si $-\frac{3}{4}\pi < \theta < \pi$.
Géométriquement, cet ensemble est le plan complexe privé du secteur angulaire délimité par la demie-droite $\mathbf{R}_-$ des réels négatifs et par la demie-droite D image de $\mathbf{R}_-$ par la rotation d'angle $\pi/4$.

Partie II.

II-1 • Soit d'abord $r \in \mathbf{Q}$. Il existe $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $r = p/q$. Par $(\mathcal{E}q_5)$, on a $f(r) = f(pq^{-1}) = f(q^{-1} + \ldots + q^{-1}) = pf(q^{-1})$. Comme on a également $f(1) = f(qq^{-1}) = qf(q^{-1})$ on obtient que $f(q^{-1}) = q^{-1}f(1)$. Cela montre que $f(r) = pq^{-1}f(1) = rf(1)$.
• Soit maintenant $x \in \mathbf{R}$. Il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui tend en décroissant vers x et une suite de rationnels $(r'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui tend en croissant vers x. Comme f est croissante on a $f(r'_n) \leqslant f(x) \leqslant f(r_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Le premier point implique ensuite que $r'_nf(1) \leqslant f(x) \leqslant r_nf(1)$. On passe à la limite et on obtient alors $f(x) = xf(1)$ par encadrement.

II-2a • Comme G est dense dans $\mathbf{R}$, il existe $s_0 \in G$ tel que $s_0 > x$ et donc $g(s_0) \in J(x)$. Autrement dit, $J(x)$ n'est pas vide.

• Par densité de G dans $\mathbf{R}$, il existe $s_1 \in G$ tel que $s_1 \leqslant x$. Soit $c \in J(x)$. Par définition de $J(x)$, il existe $s \in G$ tel que $s > x$ et tel que $g(s) = c$. On a donc $s_1 \leqslant x < s$ et puisque g est une fonction croissante $g(s_1) \leqslant g(s) = c$. On a donc montré que pour tout $c \in J(x)$, $c \geqslant g(s_1)$. Autrement dit, $g(s_1)$ est un minorant de $J(x)$.

L'ensemble $J(x)$ est donc un ensemble non-vide et minoré par $g(s_1)$, la borne inférieure de $J(x)$ est donc un réel bien défini.

II-2b • Soient deux réels $x < y$. Il est clair que $J(y) \subset J(x)$. Soit alors m un minorant de $J(x)$: l'inclusion précédente assure que m est également un minorant de $J(y)$, et donc que $m \leqslant f(y)$. En prenant $m = f(x)$ il vient $f(x) \leqslant f(y)$, ce qui montre que f est croissante.

• Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$: il s'agit de montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$ pour tout $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$ par croissance de f. Or $f(x_0) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $J(x_0)$ par définition de la borne inférieure. Ceci assure donc l'existence de $s_0 \in J(x_0)$ tel que $g(s_0) < f(x_0) + \varepsilon$. Prenons alors $\alpha = s_0 - x_0$. Pour $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$, on a en particulier $x < s_0$ et donc $f(x) \leqslant g(s_0) < f(x_0) + \varepsilon$, ce que nous voulions.

II-2c • Soit $s \in G$ tel que $s > x + t$. On pose $s' = s - t$. C'est un élément de G car G est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. On vérifie immédiatement que $s' > x$. Donc $\{s \in G : s > x + t\} \subset \{s' + t; s' \in G : s' > x\}$. Soit $s' \in G$ tel que $s' > x$. On pose $s = s' + t$. C'est un élement de G car G est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$ et on a bien $s > x + t$. Cela prouve donc que $\{s' + t; s' \in G : s' > x\} \subset \{s \in G : s > x + t\}$ et donc $\{s \in G : s > x + t\} = \{s' + t; s' \in G : s' > x\}$.

• On en déduit donc que $J(x + t) = \{g(s' + t); s' \in G : s' > x\}$. Comme $g(s' + t) = g(s') + g(t)$, on voit donc que $J(x + t)$ est l'ensemble $J(x)$ translaté par $g(t)$ ce qui entraîne facilement que $\inf J(x + t) = g(t) + \inf J(x)$, c'est-à-dire $f(x + t) = g(t) + f(x)$.

II-2d Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $G \cap]y, +\infty[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} g(t_n) = f(y)$. Comme g croît, sans perte de généralité on peut supposer que $(t_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers y (par exemple, on peut remplacer t_n par $t'_n \in G$ tel que $y < t'_n \leqslant y + 2^{-n} \min(1, t_n - y) \leqslant t_n$ et on a $f(y) \leqslant g(t'_n) \leqslant g(t_n)$). Comme f est continue à droite $\lim_{n\to+\infty} f(x + t_n) = f(x + y)$. Or la question précédente montre que $f(x + t_n) = f(x) + g(t_n)$, ce qui implique ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_5$) en passant à la limite.

Variante : Soit (y_n) une suite de G tendant vers y en décroissant.

Je dis d'abord que $g(y_n) \to f(y)$: soit en effet $\varepsilon > 0$, $f(y) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $J(y)$ donc il existe $t \in G \cap]y, +\infty[$ tel que $g(t) < f(y) + \varepsilon$. Comme $t > y$, on a $t > y_n$ à partir d'un certain rang, d'où $g(t) \geqslant g(y_n)$ aussi, et donc $g(y_n) < f(y) + \varepsilon$ à partir du même rang.

Faisons tendre n vers l'infini dans l'égalité $f(y_n + x) = g(y_n) + f(x)$. Le membre de gauche tend vers $f(y + x)$ continuité à droite de f, et le membre de droite tend vers $f(y) + f(x)$ d'où le résultat.

II-2e • Par ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_5$), on a $f(0) = f(0 + 0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. En prenant $x = 0$ à la question **2c)**, on voit que $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in G$. Donc f prolonge g.

Variante : pour prouver que f prolonge g, on peut montrer directement que $g(x) = \inf J(x)$ pour $x \in G$, mais ce fait n'est nullement évident, ni ne découle directement de la monotonie de g. Comme $g(x)$ est un minorant de $J(x)$ par croissance de g, on a directement $g(x) \leqslant f(x)$ et il suffit de montrer l'autre inégalité. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in G_+^*$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $\varepsilon_n \in]0, \gamma/n[\cap G$: on a alors $x + \varepsilon_n \in G$ et donc $g(x + \varepsilon_n) = g(x) + g(\varepsilon_n)$. En outre, $n\varepsilon_n < \gamma$, ce qui donne $ng(\varepsilon_n) \leqslant g(\gamma)$, et donc $g(x + \varepsilon_n) \leqslant g(x) + g(\gamma)/n < g(x) + \varepsilon$ à partir d'un certain

rang. Ceci assure que $g(x)+\varepsilon$ n'est pas un minorant de $J(x)$ et donc que $f(x) \leqslant g(x)+\varepsilon$, d'où $f(x) \leqslant g(x)$ en faisant $\varepsilon \to 0$.
• Par la question **1)**, il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $f(x) = \alpha x$. Le fait que f prolonge g permet de conclure.

II-3a • On a $\ell_1^2 = \ell_1$ et donc $\ell_1 = 0$ ou 1. Si $\ell_1 = 0$, alors $\ell_p = \ell_{p.1} = \ell_p.\ell_1$ $(\ell_p)_{p\geqslant 1}$ est identiquement nulle or on a supposé le contraire. Donc $\ell_1 = 1$.
• Supposons ensuite qu'il existe $p_0 \geqslant 2$ tel que $\ell_{p_0} = 0$. Comme $(\ell_p)_{p\geqslant 1}$ décroît et est positive, cela implique que $\ell_p = 0$ pour tout $p \geqslant p_0$. Soit m, un entier entre 2 et $p_0 - 1$. Il existe $k \geqslant 2$ el que $m^k \geqslant p_0$ et donc $\ell_m^k = \ell_{m^k} = 0$. Cela implique que $\ell_m = 0$. On a montré que s'il existe $p_0 \geqslant 2$ tel que $\ell_{p_0} = 0$, alors $\ell_p = 0$ pour tout entier $p \geqslant 2$, ce qui est le résultat voulu.

II-3b Soient $r \in \mathbf{Q}_+^*$. Soient $p, p', q, q' \in \mathbf{N}^*$ tels que $p/q = p'/q' = r$. On a donc $pq' = p'q$ et donc $\ell_p \ell_{q'} = \ell_{pq'} = \ell_{p'q} = \ell_{p'}\ell_q$ qui sont des quantités strictement positives par hypothèse. On peut donc poser $h(r) = \ell_p/\ell_q = \ell_{p'}/\ell_{q'}$ qui ne dépend que du rationnel r.
Soient $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}_+^*$ et soient $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbf{N}^*$ tels que $r_1 = p_1/q_1$ et $r_2 = p_2/q_2$. Alors

$$h(r_1 r_2) = h\big((p_1 p_2)/(q_1 q_2)\big) = \frac{\ell_{p_1 p_2}}{\ell_{q_1 q_2}} = \frac{\ell_{p_1}}{\ell_{q_1}} \frac{\ell_{p_2}}{\ell_{q_2}} = h(r_1)h(r_2).$$

Cela montre l'existence d'une fonction comme dans l'énoncé.
Montrons l'unicité. Soit h_0 une fonction comme dans l'énoncé. Alors pour tout $p, q \in \mathbf{N}^*$, on a $1 = \ell_1 = h_0(1) = h_0(qq^{-1}) = h_0(q)h_0(q^{-1}) = \ell_q h_0(q^{-1})$. Donc $h_0(q^{-1}) = 1/\ell_q$ et donc $h_0(p/q) = h_0(p)h_0(q^{-1}) = \ell_p/\ell_q = h(p/q)$, ce qui montre l'unicité.
Variante de forme : par «analyse-synthèse». Si h existe, on a nécessairement $h(nr) = h(n)h(r)$ pour tout rationnel $r > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$. En écrivant $r = p/q$ et en prenant $n = q$, cela entraîne que h satisfait nécessairement $h(r) = h(p)/h(q) = \ell_p/\ell_q$, ce qui clôt la phase d'analyse. On montre alors en phase de synthèse la bonne définition de h (*i.e.* l'indépendance du choix du représentant (p, q) de r et l'équation fonctionnelle comme ci-dessus).

II-3c Soient $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}_+^*$ tels que $r_1 \leqslant r_2$. Il est possible de les représenter comme des quotients d'entiers de même dénominateur ; c'est-à-dire qu'il existe $p_1, p_2, q \in \mathbf{N}^*$ tels que $r_1 = p_1/q$ et $r_2 = p_2/q$ ce qui implique que $p_1 \leqslant p_2$. Comme la suite $(\ell_p)_{p\geqslant 1}$ décroît, on a $h(r_1) = \ell_{p_1}/\ell_q \geqslant \ell_{p_2}/\ell_q = h(r_2)$, ce qui prouve que h décroît.

II-3d On applique le groupe de questions **2)** à $G = \{\log r\,;\, r \in \mathbf{Q}_+^*\}$ et g définie par $g(\log r) = -\log h(r)$, $r \in \mathbf{Q}_+^*$.
Montrons que G est sous-groupe additif dense de $\mathbf{R}$. On observe tout d'abord que 0, élément neutre du groupe additif $\mathbf{R}$, est $\log 1$. Donc $0 \in G$. De plus, pour tous $r, r' \in \mathbf{Q}_+^*$, $\log r - \log r' = \log r/r' \in G$ car $r/r' \in \mathbf{Q}_+^*$. Cela montre que G est un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$.
On observe ensuite que pour tout $x \in \mathbf{R}$, e^x est limite de $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, une suite de rationnels strictement positifs. Par continuité du logarithme, x est donc limite de la suite $(\log r_n)$ qui sont des éléments de G. Cela montre que G est dense dans $\mathbf{R}$.
Comme log croît et que h décroît, on voit que g croît. Par ailleurs, pour tout $s, t \in G$, il existe $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}_+^*$ tels que $s = \log r_1$ et $t = \log r_2$. On a donc $g(s) + g(t) = -\log h(r_1) - \log h(r_2) = -\log\left(h(r_1)h(r_2)\right) = -\log h(r_1, r_2) = g(\log(r_1 r_2)) = g(\log r_1 + \log r_2) = g(s+t)$.
On peut donc appliquer la question **2e)** et montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $g(\log r) = \alpha \log r$, ce qui implique que $\log h(r) = \log r^{-\alpha}$ et par conséquent $\ell_p = h(p) = p^{-\alpha}$ pour $p \in \mathbf{N}^*$.

II-4a Petite précaution avant de commencer : les a_n sont tous $\geqslant 0$ et non tous nuls, donc $D(\sigma)$ est > 0 (car minoré par tout terme de la somme), ce qui légitime le quotient.

Il est clair que $D(\sigma)/D(\sigma) = 1$ tend vers 1 lorsque $\sigma \to 0^+$. Donc $\ell_1 = 1$. Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$. On observe que

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(qp\sigma)}{D(p\sigma)} = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(q\sigma)}{D(\sigma)} = \ell_q \ .$$

Comme $D(pq\sigma)/D(\sigma) = \big(D(pq\sigma)/D(p\sigma)\big)\big(D(p\sigma)/D(\sigma)\big)$, en passant à la limite lorsque $\sigma \to 0^+$, on en déduit que $\ell_{pq} = \ell_p \ell_q$.

II-4b Soit un réel $\sigma > 0$. On observe que pour tous $p, q, n \in \mathbf{N}^*$ tels que $q \geqslant p$, on a $0 \leqslant e^{-q\sigma\lambda_n} \leqslant e^{-p\sigma\lambda_n} \leqslant e^{-\sigma\lambda_n}$ car $x \mapsto e^{-x}$ décroît. On en déduit que $D(q\sigma) \leqslant D(p\sigma) \leqslant D(\sigma)$ et donc que

$$\ell_q = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(q\sigma)}{D(\sigma)} \leqslant \ell_p = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{D(p\sigma)}{D(\sigma)} \leqslant 1 \ .$$

Cela montre que $(\ell_p)_{p\geqslant 1}$ est une suite de $[0,1]$ décroissante telle que $\ell_{pq} = \ell_p \ell_q$, pour tous $p, q \in \mathbf{N}^*$. Les résultats des questions **3a)** et **3d)** permettent donc de conclure.

II-5a Pour tout réel $\sigma > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\sigma\lambda_n \geqslant 0$ est et donc $e^{-\sigma\lambda_n} \in [0,1]$. De plus, la fonction f est bornée sur $[0,1]$ et on a donc $|a_n f(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}| \leqslant \|f\|_\infty a_n e^{-\sigma\lambda_n}$ car les a_n sont positifs. Donc la série de terme général $(a_n f(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est absolument convergente par majoration et donc convergente dans $\mathbf{R}$.

II-5b Soient $f, g \in \mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}$. Il est clair, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, que

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k\big(f(e^{-\sigma\lambda_k}) + bg(e^{-\sigma\lambda_k})\big)e^{-\sigma\lambda_k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k f(e^{-\sigma\lambda_k})e^{-\sigma\lambda_k} + b \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k g(e^{-\sigma\lambda_k})e^{-\sigma\lambda_k} \ .$$

En passant à la limite, on obtient par continuité de la somme que $\Lambda_{\alpha,\sigma}(f + bg) = \Lambda_{\alpha,\sigma}(f) + b\Lambda_{\alpha,\sigma}(g)$, ce qui montre que $\Lambda_{\alpha,\sigma}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$. De plus, l'inégalité triangulaire pour les séries implique que

$$D(\sigma)|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |a_n f(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\sigma\lambda_n} = \|f\|_\infty D(\sigma) \ ,$$

qui entraîne immédiatement l'inégalité voulue.

II-6a On observe que $\Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_p) = D((p+1)\sigma)/D(\sigma)$. Donc $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_p) = (p+1)^{-\alpha}$. Or il a été montré à la question **I-3d)** que $(p+1)^{-\alpha} = \Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)$. On a donc montré que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad \lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_p) = \Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p) \ .$$

Soit Q une fonction polynômiale de degré d : il existe donc $b_0, \ldots, b_d \in \mathbf{R}$ tels que $Q = b_d\mathtt{m}_d + \ldots + b_1\mathtt{m}_1 + b_0\mathtt{m}_0$. Comme montré à la question précèdente, $\Lambda_{\alpha,\sigma}$ est linéaire sur l'espace des fonctions bornées sur $[0,1]$ ce qui implique

$$\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(Q)=\lim_{\sigma\to 0^+}\sum_{j=0}^{d}b_j\Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_j)=\sum_{j=0}^{d}b_j\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(\mathtt{m}_j)=\sum_{j=0}^{d}b_j\Lambda_{\alpha}(\mathtt{m}_j)=\Lambda_\alpha(Q)$$

car Λ_α est également linéaire sur l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$. Cela montre bien le résultat voulu.

II-6b Nous allons donner deux preuves de cette extension

• **1ère méthode :** Soit $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, une fonction continue. Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de fonctions polynômiales telles que $\lim_{n\to\infty}\|f-P_n\|_\infty=0$ et on a

$$\begin{aligned}|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)-\Lambda_\alpha(f)| &\leqslant |\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)-\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)|+|\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)-\Lambda_\alpha(P_n)|+|\Lambda_\alpha(P_n)-\Lambda_\alpha(f)| \\ &\leqslant 2\|f-P_n\|_\infty+|\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)-\Lambda_\alpha(P_n)|\ .\end{aligned} \tag{4.1}$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $n(\varepsilon)\in\mathbf{N}^*$ tel que $\|f-P_{n(\varepsilon)}\|_\infty<\varepsilon/3$ et il existe un réel $\sigma_\varepsilon>0$ tel que pour tout $\sigma\in]0,\sigma_\varepsilon[$, on ait $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_{n(\varepsilon)})-\Lambda_\alpha(P_{n(\varepsilon)})|<\varepsilon/3$. L'inégalité précédente appliquée au rang $n(\varepsilon)$ montre alors que pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\sigma_\varepsilon>0$ tel que pour tout $\sigma\in]0,\sigma_\varepsilon[$, on ait $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)-\Lambda_\alpha(f)|<\varepsilon$, ce qui permet de conclure.

• **2ème méthode.** On commence de même, en fixant $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ une fonction continue et en se donnant une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de fonctions polynômiales telles que $\lim_{n\to\infty}\|f-P_n\|_\infty=0$. On pose ensuite, pour tout $n\in\mathbf{N}$ et $\sigma>0$: $g_n(\sigma)=\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)$ et $g(\sigma)=\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)$. On va appliquer le théorème de la double limite à la suite (g_n) :

— La suite (g_n) converge uniformément vers g au voisinage à droite de 0, puisqu'en fait $\|g_n-g\|_{\infty,\mathbf{R}_+^*}=\|\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n-f)\|_{\infty,\mathbf{R}_+^*}\leqslant\|P_n-f\|_{\infty,[0,1]}$ d'après la question **5b)**.

— À n fixé, on a $\lim_{\sigma\to 0}g_n(\sigma)=\lim_{\sigma\to 0}\Lambda_{\alpha,\sigma}(P_n)=\Lambda_\alpha(P_n)$ d'après la question **6a**.

Le théorème de la double limite assure que $g(\sigma)$ a une limite finie quand $\sigma\to 0$, et que cette limite vaut $\lim_{n\to\infty}\Lambda_\alpha(P_n)$.

Il ne reste plus qu'à justifier que $\lim_{n\to\infty}\Lambda_\alpha(P_n)=\Lambda_\alpha(f)$, ce qui est conséquence par exemple de la question **I-3e)** (continuité de la forme linéaire Λ_α sur l'espace des fonctions continues par morceaux).

II-6c Comme $0\leqslant f_\varepsilon\leqslant J\leqslant h_\varepsilon$ et puisque les a_n sont positifs on a $0\leqslant a_nf_\varepsilon(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}\leqslant a_nJ(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}\leqslant a_nh_\varepsilon(e^{-\sigma\lambda_n})e^{-\sigma\lambda_n}$ et en sommant et divisant par $D(\sigma)$, on a donc

$$0\leqslant\Lambda_{\alpha,\sigma}(f_\varepsilon)\leqslant\Lambda_{\alpha,\sigma}(J)\leqslant\Lambda_{\alpha,\sigma}(h_\varepsilon)\ .$$

Puisque f_ε et h_ε sont continues, le résultat de la question précédente implique que $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(f_\varepsilon)=\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)$ et $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(h_\varepsilon)=\Lambda_\alpha(h_\varepsilon)$. Il existe donc un réel $\sigma_\varepsilon>0$ tel que pour tout $\sigma\in]0,\sigma_\varepsilon]$, on ait $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f_\varepsilon)-\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)|\leqslant\varepsilon$ et $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(h_\varepsilon)-\Lambda_\alpha(h_\varepsilon)|\leqslant\varepsilon$. Cela implique donc

$$\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)-\varepsilon\leqslant\Lambda_{\alpha,\sigma}(J)\leqslant\Lambda_\alpha(h_\varepsilon)+\varepsilon\ .$$

En appliquant le résultat de la question **I-3g)**, on a d'une part $\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)\geqslant\Lambda_\alpha(J)-e2^{\alpha+2}\varepsilon/\Gamma(\alpha)$ et d'autre part

$$\Lambda_\alpha(h_\varepsilon)\leqslant\Lambda_\alpha(f_\varepsilon)+\frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\leqslant\Lambda_\alpha(J)+\frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\ .$$

Combiné à l'inégalité précédente, cela implique l'inégalité voulue avec $C_\alpha=\frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}+1$.

II-6d La question précédente implique que $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{\alpha,\sigma}(J) = \Lambda_\alpha(J)$. On constate ensuite que

$$\Lambda_{\alpha,\lambda_n^{-1}}(J) = \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \ .$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = 0$ et ce qui précède implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \Lambda_\alpha(J) \ .$$

On observe ensuite que

$$\Gamma(\alpha)\Lambda_\alpha(J) = \int_{e^{-1}}^{1} (-\log t)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \left[\frac{1}{\alpha}(\log t)^\alpha\right]_{e^{-1}}^{1} = \frac{1}{\alpha} \ .$$

Comme $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ on obtient bien que $\Lambda_\alpha(J) = 1/\Gamma(\alpha+1)$.

II-7a Soit un réel $\sigma > 0$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a $\Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_p) = D((p+1)\sigma)/D(\sigma)$, par définition. Donc $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_p) = 1$. En particulier, puisque $\Lambda_{0,\sigma}$ est linéaire, on obtient $\Lambda_{0,\sigma}(g) = \Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_0) - 2\Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_1) + \Lambda_{0,\sigma}(\mathtt{m}_2)$ et donc $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(g) = 0$.

II-7b On observe que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mathbf{1}_{[0,1-\delta]}(t) = \mathbf{1}_{[\delta,1]}(1-t) \leqslant \delta^{-2}(1-t)^2$. On conclut au résultat souhaité par croissance et linéarité de $\Lambda_{0,\sigma}$.

II-7c On écrit d'abord par inégalité triangulaire
$D(\sigma)\big|f(1) - \Lambda_{0,\sigma}(f)\big| = \Big|\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big(f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big)\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|$ et l'on casse cette dernière somme en deux, en écrivant
$a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big| = a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[1-\delta,1]}(e^{-\lambda_n\sigma}) + a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[0,1-\delta[}(e^{-\lambda_n\sigma})$
On gère alors la première somme en majorant $\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|$ par $\max_{t\in[1-\delta,1]} \big|f(1) - f(t)\big|$ d'où par croissance de la somme
$\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[1-\delta,1]}(e^{-\lambda_n\sigma}) \leqslant D(\sigma).\max_{t\in[1-\delta,1]} \big|f(1) - f(t)\big|$
et la deuxième en majorant $\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[0,1-\delta[}(e^{-\lambda_n\sigma})$ par $2\|f\|_\infty.\delta^{-2} g\big(e^{-\lambda_n\sigma}\big)$ via la question précédente. On obtient ainsi par croissance
$\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma}\big|f(1) - f(e^{-\lambda_n\sigma})\big|\mathbf{1}_{[0,1-\delta]}(e^{-\lambda_n\sigma}) \leqslant 2\|f\|_\infty \delta^{-2} \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n\sigma} g\big(e^{-\lambda_n\sigma}\big) \leqslant 2\|f\|_\infty\, \delta^{-2} D(\sigma)\Lambda_{0,\sigma}(g$
et on a bien l'inégalité voulue en divisant par $D(\sigma)$.
Soit un réel $\varepsilon > 0$. Comme f est continue à gauche en 1, il existe $\delta_\varepsilon \in\,]0,1[$ tel que $\max_{t\in[1-\delta_\varepsilon,1]} \big|f(1) - f(t)\big| < \varepsilon/2$. Puisque $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(g) = 0$, il existe σ_ε tel que $0 \leqslant 2\|f\|_\infty\, \delta_\varepsilon^{-2}\Lambda_{0,\sigma}(g) < \varepsilon/2$ pour tout $\sigma \in]0,\sigma_\varepsilon[$ et l'inégalité précédente implique que $|f(1) - \Lambda_{0,\sigma}(f)| < \varepsilon$. On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe σ_ε tel que $|f(1) - \Lambda_{0,\sigma}(f)| < \varepsilon$ pour tout $\sigma \in]0,\sigma_\varepsilon[$. Autrement dit, $\lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(f) = f(1)$.

II-7d On rappelle que J est continue par morceaux, donc bornée sur $[0,1]$, et continue à gauche en 1 valant 1 en 1. On rappelle également que $\Lambda_{0,\lambda_n^{-1}}(J) = D(\lambda_n^{-1})^{-1}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$. Par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = 0$ et ce qui précède implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \lim_{\sigma\to 0^+} \Lambda_{0,\sigma}(J) = J(1) = 1 \ ,$$

ce qui est bien $(\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6)$ dans le cas où $\alpha = 0$ car $\Gamma(1) = 1$.

Partie III.

III-1a On suppose que D_φ contient deux points distincts $\sigma_0 < \sigma_1$, sinon l'assertion est trivialement vérifiée. Soit $\sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$. On a $\sigma_0 - 1 \leqslant \sigma - 1 \leqslant \sigma_1 - 1$. Si $x \in [1, +\infty[$, on a $\log x \geqslant 0$, donc $(\sigma - 1)\log x \leqslant (\sigma_1 - 1)\log x$ et donc $|\varphi(x)|x^{\sigma-1} \leqslant |\varphi(x)|x^{\sigma_1-1}$. Si $x \in]0,1]$, alors $\log x \leqslant 0$ donc $(\sigma-1)\log x \leqslant (\sigma_0-1)\log x$ et donc $|\varphi(x)|x^{\sigma-1} \leqslant |\varphi(x)|x^{\sigma_0-1}$. Par conséquent pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $|\varphi(x)|x^{\sigma-1} \leqslant |\varphi(x)|x^{\sigma_0-1} + |\varphi(x)|x^{\sigma_1-1}$. Cela montre que $x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto |\varphi(x)|x^{\sigma-1}$ est majorée par une fonction intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, elle est donc intégrable et $\sigma \in D_\varphi$. Cela prouve que D_φ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Variante : il est possible de prouver cette intégrabilité en rappelant que $\sigma \mapsto \varphi(x)x^{\sigma-1}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, donc localement intégrable, et qu'il suffit de prouver l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$, par majoration (locale) comme cela a été fait, ou par relation de comparaison, par exemple $\varphi(x)x^{\sigma-1} = \mathrm{O}_{x\to 0}(\varphi(x)x^{\sigma_0-1})$ et $\varphi(x)x^{\sigma-1} = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(\varphi(x)x^{\sigma_1-1})$.

Variante proposée par un candidat : par l'inégalité de Hölder. On prend $\sigma = t_0\sigma_0 + t_1\sigma_1$ dans $]\sigma_0, \sigma_1[$, avec $t_0 = 1 - t_1 \in]0,1[$. On note $p_i = 1/t_i$ de sorte que $1/p_0 + 1/p_1 = 1$ et on écrit

$$|x^\sigma \varphi(x)/x| = (x^{\sigma_0}|\varphi(x)|/x)^{t_0} \times (x^{\sigma_1}|\varphi(x)|/x)^{t_1}$$

L'inégalité de Hölder (avec pour exposants conjugués p_1, p_2) fournit alors, dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ a priori

$$\int_{\mathbf{R}_+^*} x^\sigma \frac{|\varphi(x)|}{x}\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{M}|\varphi|(\sigma_0)^{t_0} \times \mathcal{M}|\varphi|(\sigma_1)^{t_1} < +\infty$$

III-1b On observe que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $|\varphi(x)x^{s-1}| = |\varphi(x)|x^{\mathrm{Re}(s)-1}$. Donc si $\mathbf{Re}(s) \in D_\varphi$, la fonction $x \in \mathbf{R}_+^* \longmapsto \varphi(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

III-1c On pose $U = \{s \in \mathbf{C} : \sigma_0 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_1\}$: il s'agit d'un ouvert (image réciproque de l'ouvert $]\sigma_0, \sigma_1[$ par l'application partie réelle qui est continue). Pour tout $s \in U$, comme montré à la question précédente, $x \in \mathbf{R}_+^* \longmapsto \varphi(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $s \mapsto \varphi(x)x^{s-1} = \varphi(x)\exp((s-1)\log x)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et donc sur U en particulier.

Comme montré à la question **1a)**, pour tout $s \in U$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $|\varphi(x)x^{s-1}| \leqslant |\varphi(x)|x^{\sigma_0-1} + |\varphi(x)|x^{\sigma_1-1} = f(x)$. Comme $\sigma_0, \sigma_1 \in D_\varphi$, f est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres implique que $\mathcal{M}\varphi$ est holomorphe sur U.

III-1d D'abord la question **1)** de la partie **I** assure que $\Gamma(\sigma)$ est bien définie pour tout $\sigma > 0$, et donc que $\mathbf{R}_+^* \subset D_\varphi$.

Réciproquement, si $\sigma \leqslant 0$, la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{\sigma-1}$ est équivalente à $x \mapsto x^{\sigma-1}$ qui n'est pas intégrable en 0 : ceci assure la non intégrabilité en 0 de $x \mapsto e^{-x}x^{\sigma-1}$ (par exemple via la minoration $e^{-x}x^{\sigma-1} \geqslant x^{\sigma-1}/2$ valide pour $x \in]0,\delta]$, avec $\delta > 0$ suffisamment petit), ce qui donne l'autre inclusion et l'égalité $D_\varphi = \mathbf{R}_+^*$.

La fonction $\mathcal{M}\varphi$ ainsi définie est holomorphe sur $\mathbf{H}_0$ par **III-1c)** (σ_0 et σ_1 pouvant être pris arbitrairement dans $\mathbf{R}_+^*$). Soit f un autre prolongement holomorphe de Γ à ce même ouvert $\mathbf{H}_0$. On aurait alors $\mathcal{M}\varphi - f$ holomorphe sur l'ouvert connexe $\mathbf{H}_0$ et nulle sur $\mathbf{R}_+^*$, ensemble contenant un point d'accumulation. Le principe du prolongement analytique entraîne $\mathcal{M}\varphi = f$ sur $\mathbf{H}_0$, d'où l'unicité de ce prolongement holomorphe.

III-1e Pour tout $s \in \mathbf{H}_0$, on pose

$$f(s) = \Gamma(s+k) - (s+k-1)(s+k-2)\dots s\Gamma(s) .$$

Il s'agit clairement d'une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe $\mathbf{H}_0$ qui s'annule sur $\mathbf{R}_+^*$, par application répétée de **I-1)**. Le principe des zéros isolés permet alors de conclure.
Variante : on peut également procéder par intégration par parties répétées en prenant s complexe directement, ce qui revient à d'abord prouver que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pour s de partie réelle $\sigma > 0$ (le calcul se mène comme en **I-1)**, en changeant σ en s, puisque $|e^s| = e^\sigma$ pour le crochet).

III-1f On a $1 - 2|y| + y^2 = (1-|y|)^2 \geqslant 0$ et donc $2(1+y^2) \geqslant (1+|y|)^2$, ce qui montre $\sqrt{1+y^2} \geqslant 2^{-\frac{1}{2}}(1+|y|)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.
Soit $k \in \mathbf{N}$ et soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$. On a $|s+k| = \sqrt{(k+\mathrm{Re}(s))^2 + (\mathrm{Im}(s))^2}$. Comme $k + \mathrm{Re}(s) \geqslant 1$, on en déduit que

$$|s+k| \geqslant \sqrt{1+(\mathrm{Im}(s))^2} \geqslant 2^{-\frac{1}{2}}\big(1+|\mathrm{Im}(s)|\big)$$

qui est l'inégalité désirée.

III-1g On suppose que $s \in \mathbf{C}$ est tel que $\mathrm{Re}(s) \in [1, \sigma_0]$. Une application répétée de la question **III-5e)** implique que $\Gamma(s+k+1) = s(s+1)\dots(s+k)\Gamma(s)$. Par ce qui précède on a donc, en minorant $|s|$ par 1 et les $|s+\ell|$ (pour $\ell \geqslant 1$) par $2^{-1/2}(1+|\mathrm{Im} s|)$

$$\begin{aligned}
|\Gamma(s)| &= \frac{|\Gamma(s+k+1)|}{|s|\,|s+1|\dots|s+k|} && (4.2)\\
&\leqslant 2^{k/2}\big(1+|\mathrm{Im}(s)|\big)^{-k}|\Gamma(s+k+1)| && (4.3)\\
&\leqslant 2^{k/2}\big(1+|\mathrm{Im}(s)|\big)^{-k}\int_0^{+\infty} e^{-t}|t^{s+k}|\,\mathrm{d}t && (4.4)\\
&\leqslant 2^{k/2}\big(1+|\mathrm{Im}(s)|\big)^{-k}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k}\,\mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Or pour tout $t \in [0,1]$ on a $e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k} \leqslant 1$ et pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k} \leqslant e^{-t}t^{\sigma_0+k}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\mathrm{Re}(s)+k}\,\mathrm{d}t && (4.5)\\
&\leqslant 1 + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\sigma_0+k}\,\mathrm{d}t && (4.6)\\
&\leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\sigma_0+k}\,\mathrm{d}t = 1 + \Gamma(\sigma_0+k+1),
\end{aligned}$$

ce qui implique le résultat désiré.
Remarque : Il est également possible de partir de $\Gamma(s+k) = s(s+1)\dots(s+k-1)\Gamma(s)$ et de minorer tous les $|s+\ell|$ par $2^{-1/2}(1+|\mathrm{Im} s|)$. Le même calcul montre qu'en posant

$M'_{k,\sigma_0} = 2^{k/2}(1 + \Gamma(\sigma_0 + k))$ on a la majoration légèrement plus fine $|\Gamma(s)| \leqslant \frac{M'_{k,\sigma_0}}{(1+|\mathrm{Im}(s)|)^k}$.

III-2a On fixe un réel $y > 0$. En effectuant le changement de variable $x = e^{-2\pi v}$ pour lequel $e^{-2\pi\sigma v}\mathrm{d}v = -\frac{1}{2\pi}x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$, on obtient

$$\int_{-y}^{y} |\Phi_\sigma(v)|\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_{e^{-2\pi y}}^{e^{2\pi y}} |\varphi(x)|x^{\sigma-1}\mathrm{d}x\ .$$

Comme $y \mapsto \int_{-y}^{y} |\Phi_\sigma(v)|\mathrm{d}v$ croît, Φ_σ est intégrable sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $y \mapsto \int_{-y}^{y} |\Phi_\sigma(v)|\mathrm{d}v$ est majoré.

De même $y \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{e^{-2\pi y}}^{e^{2\pi y}} |\varphi(x)|x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$ croît et donc $x \mapsto |\varphi(x)|x^{\sigma-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ si et seulement si $y \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{e^{-2\pi y}}^{e^{2\pi y}} |\varphi(x)|x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$ est majoré. L'égalité précédente montre donc le résultat voulu.

Remarque : il est correct également d'écrire l'égalité, qui a un sens dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ car les fonctions sont positives, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_\sigma(v)|\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} |\varphi(x)|x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$ (par changement de variables). La finitude de l'un des deux membres entraîne celle de l'autre.

III-2b On suppose $\sigma \in D_\varphi$, ce qui implique que Φ_σ est intégrable sur $\mathbf{R}$ par la question précèdente. On fixe ensuite $t \in \mathbf{R}$. Ce qui précède et la question **III-1b)** impliquent que la transformée de Mellin de φ est bien définie en $\sigma + it$. On fixe un réel $y > 0$ et on effectue le changement de variable $x = e^{-2\pi v}$ pour lequel $e^{-2i\pi tv}e^{-2\pi\sigma v}\mathrm{d}v = -\frac{1}{2\pi}x^{\sigma+it-1}\mathrm{d}x$. On obtient alors

$$\int_{-y}^{y} \Phi_\sigma(v)e^{-2i\pi tv}\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_{e^{-2\pi y}}^{e^{2\pi y}} \varphi(x)x^{\sigma+it-1}\mathrm{d}x\ .$$

Comme $v \in \mathbf{R} \mapsto \Phi_\sigma(v)e^{-2i\pi tv}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et comme on a montré que $x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto \varphi(x)x^{\sigma+it-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, en faisant tendre $y \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\sigma(v)e^{-2i\pi tv}\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(x)x^{\sigma+it-1}\mathrm{d}x\ ,$$

qui est le résultat voulu.

Remarque : On peut bien entendu aussi effectuer le changement de variable $x = e^{-2\pi v}$ dans l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \varphi(x)x^{\sigma+it-1}\mathrm{d}x$, valide par intégrabilité de l'intégrande (et préservation de celle-ci par changement de variable difféomorphique).

III-2c Comme $\widehat{\Phi}_\sigma$ est supposé intégrable sur $\mathbf{R}$, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier qui permet d'affirmer que

$$\widehat{\widehat{\Phi}}_\sigma(-v) = \Phi_\sigma(v) = \varphi(e^{-2\pi v})e^{-2\pi\sigma v}.$$

Or la question précédente implique que

$$\widehat{\widehat{\Phi}}_\sigma(-v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma + it)e^{2i\pi tv}\mathrm{d}t\ .$$

Autrement dit, pour tout $v \in \mathbf{R}$ on a

$$\varphi(e^{-2\pi v}) = \frac{1}{2\pi} e^{2\pi\sigma v} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma + it) e^{-2i\pi t v} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma + it) e^{2\pi v(\sigma + it)} \mathrm{d}t \, .$$

On remarque ensuite que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, il existe $v \in \mathbf{R}$ tel que $x = e^{-2\pi v}$ (on prend $v = -\frac{1}{2\pi} \log x$) et que $e^{-2\pi v(\sigma+it)} = x^{-\sigma-it}$. On obtient donc $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma + it) x^{-\sigma-it} \mathrm{d}t$ comme voulu.

III-2d La question **III-1d)** montre que $\mathbf{R}_+^* = D_\varphi$. On fixe $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$. La question **III-2a)** montre que Φ_σ est intégrable sur $\mathbf{R}$, ce qui permet de définir sa transformée de Fourier. On va montrer que Φ_σ satisfait l'hypothèse de la question **I-5)**. Pour cela, on note que

$$\Phi_\sigma'(v) = 2\pi(e^{-2\pi v} - \sigma)\Phi_\sigma(v) \quad \text{et} \quad \Phi_\sigma''(v) = 4\pi^2\big((e^{-2\pi v} - \sigma)^2 - e^{-2\pi v}\big)\Phi_\sigma(v) \, .$$

Pour tout $v \in \mathbf{R}$, on pose $f(v) = v^2(|\Phi_\sigma(v)| + |\Phi_\sigma'(v)| + |\Phi_\sigma''(v)|)$. Le calcul précèdent implique qu'il existe une fonction polynômiale P de degré 2 de coefficient dominant $4\pi^2$ telle que $f(v) = P(e^{-2\pi v})v^2 e^{-2\pi\sigma v} \exp(-e^{-2\pi v})$. Lorsque v tend vers $+\infty$, $P(e^{-2\pi v}) \exp(-e^{-2\pi v})$ tend vers $P(0)$ et $v^2 e^{-2\pi\sigma v}$ tend vers 0, donc $f(v)$ tend vers 0. Lorsque v tend vers $+\infty$, $P(e^{2\pi v})v^2 e^{2\pi\sigma v} \sim 4\pi^2 v^2 e^{2\pi(2+\sigma)v}$ Or $\exp(-e^{2\pi v}) = o\big(v^2 e^{2\pi(2+\sigma)v}\big)$, donc $f(-v)$ tend vers 0 lorsque $v \to +\infty$. Cela montre que

$$\lim_{v \to \pm\infty} v^2(|\Phi_\sigma(v)| + |\Phi_\sigma'(v)| + |\Phi_\sigma''(v)|) = 0 \, ,$$

et la question **I-5)** implique que $\widehat{\Phi}_\sigma$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

III-2e On rappelle que si $\varphi(x) = e^{-x}$, alors pour tout $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\mathcal{M}\varphi(\sigma + it) = \Gamma(\sigma + it)$. Les questions **III-2c)** et **2e)** impliquent la première formule. Si $\sigma > 1$, alors on a (en faisant $\sigma \leftrightarrow \sigma - 1$)

$$\begin{aligned}
e^{-x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\sigma - 1 + it) x^{-\sigma+1-it} \mathrm{d}t && (4.7)\\
&= \frac{x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\sigma - 1 + it) x^{-\sigma-it} \mathrm{d}t && (4.8)\\
&= \frac{x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(\sigma + it)}{\sigma - 1 + it} x^{-\sigma-it} \mathrm{d}t \, ,
\end{aligned}$$

d'après l'équation fonctionnelle de Γ dans $\mathbf{H}_0$ montrée à la question **III-1e)**. Cela entraîne immédiatement le résultat voulu.

III-3 On observe que pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$,

$$|\varphi(x)f(x)| \leqslant C(1 + |x|)^k |\varphi(x)| \leqslant C(1 + |x|)^{-2}(1 + |x|)^{k+2}|\varphi(x)| \leqslant C\rho_{k+2,0}(\varphi)(1 + |x|)^{-2} \, .$$

De plus si $x \in [-1, 1]\backslash\{0\}$, on a

$$|\varphi(x)f(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty |f(x)| = \rho_{0,0}(\varphi)|f(x)|$$

et donc pour tout $x \in \mathbf{R}^*$

$$|\varphi(x)f(x)| \leqslant C\rho_{k+2,0}(\varphi)(1+|x|)^{-2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(|x|) + \rho_{0,0}(\varphi)|f(x)|\mathbb{1}_{[0,1[}(|x|)$$

ce qui assure l'intégrabilité de φf sur $\mathbf{R}$.
On pose $C_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x + C\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)^{-2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x + 2C$. On en déduit donc que

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x \leqslant C_1 \max(\rho_{0,0}(\varphi), \rho_{k+2,0}(\varphi)) \ ,$$

ce qui permet de conclure quant à la continuité de T_f.

III-4a On a $\varphi(x)/(\varepsilon^2+x^2) \leqslant \|\varphi\|_\infty/(\varepsilon^2+x^2)$. La fonction $x \mapsto 1/(\varepsilon^2+x^2)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ (continue sur $\mathbf{R}$ donc localement intégrable, et équivalente en $\pm\infty$ à $1/x^2$ qui l'est par Riemann) et donc $x \mapsto \varphi(x)/(\varepsilon^2+x^2)$ également. Par le changement de variable $u = x/\varepsilon$, on obtient

$$\varepsilon\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(y)}{\varepsilon^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{\varphi(\varepsilon u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(\varepsilon u)}{1+u^2}\mathbb{1}_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]}(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme φ est continue, pour tout $u \in \mathbf{R}$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varphi(\varepsilon u)/(1+u^2)\mathbb{1}_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]}(u) = \varphi(0)(1+u^2)^{-1}$. Pour tout $u \in \mathbf{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a de plus $|\varphi(\varepsilon u)/(1+u^2)\mathbb{1}_{[-1/\varepsilon,1/\varepsilon]}(u)| \leqslant \|\varphi\|_\infty(1+u^2)^{-1}$ et comme $u \mapsto (1+u^2)^{-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ d'intégrale π, on a par convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\varepsilon u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi\varphi(0),$$

qui entraîne le résultat voulu.
Variante suggérée par l'indication : on a $\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{Arctan}\,(1/\varepsilon)$ qui tend vers π quand $\varepsilon \to 0^+$. Pour répondre à la question, il suffit donc de montrer que $\Delta(\varepsilon) = |\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x - \varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(0)}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x|$ tend vers 0. On se fixe $\delta > 0$; par inégalité triangulaire pour tout $\alpha \in]0,1[$ par :

$$|\Delta(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x + \varepsilon\int_{|x|>\alpha}\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{\varepsilon^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

En prenant α assez petit pour que $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leqslant \delta$, la première intégrale se majore par $\pi\delta$. Pour la 2è on est à l'écart de 0, on peut donc la majorer par $\varepsilon \times 2\|\varphi\|_\infty \int_{|x|>\alpha} x^{-2}\,\mathrm{d}x$, qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. Ainsi, pour α pris assez petit on aura, dès que ε est assez voisin de 0, $|\Delta(\varepsilon)| \leqslant 2\delta$.

III-4b Il est clair que $\int_\delta^1 |\log(|x|)|\mathrm{d}x = 1 + \delta\log\delta - \delta$ qui tend vers 1 lors que δ tend vers 0^+. Comme $\ell = \ell_0 + i\frac{\pi}{2}\mathtt{sgn}$, on en déduit que tout $f \in \{\ell, \ell_0, \mathtt{sgn}, q_\varepsilon\}$ est intégrable sur $[-1,1]$. Par ailleurs $\lim_{x\to\pm\infty}|x|^{-1}f(x) = 0$. Cela montre que f satisfait les hypothèses de la question **III-3)** ce qui permet de conclure.

III-4c On prolonge la fonction continûment par la valeur $\varphi'(0)$ en 0. Tout autre prolongement continu W_φ de $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ à $\mathbf{R}$ coïnciderait avec V_φ sur $\mathbf{R}^*$ qui est dense dans $\mathbf{R}$: on aurait donc $V_\varphi = VW\varphi$ sur $\mathbf{R}$.

Avec les conventions algébriques habituelles sur les bornes de l'intégrale, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\Big|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\Big| = \Big|\frac{1}{x}\int_0^x \varphi'(y)\,\mathrm{d}y\Big| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |\varphi'(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \|\varphi'\|_\infty\ .$$

On a donc

$$\Big|\int_{-1}^1 V_\varphi(x)\mathrm{d}x\Big| \leqslant 2\|\varphi'\|_\infty = 2\rho_{0,1}(\varphi)\ .$$

D'autre part

$$\Big|\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\Big| \leqslant \frac{\rho_{1,0}(\varphi)}{|x|(1+|x|)}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|) \leqslant \rho_{1,0}(\varphi)|x|^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|).$$

Cette inégalité assure la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x$ et donne par inégalité triangulaire

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \rho_{1,0}(\varphi)\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|).\mathrm{d}x = 2\rho_{1,0}(\varphi)\ .$$

On en déduit donc que

$$|\langle\,\mathtt{VP}\,|\,\varphi\rangle| \leqslant 2\rho_{0,1}(\varphi) + 2\rho_{1,0}(\varphi) \leqslant 4\max(\rho_{0,1}(\varphi),\rho_{1,0}(\varphi))$$

qui implique le résultat désiré.

III-4d On a d'abord $\Big|\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)}{y}\Big| \leqslant \varepsilon^{-1}|\varphi(y)|$. Comme φ est intégrable sur $\mathbf{R}$, cela implique que $x \mapsto x^{-1}\varphi(x)1_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.
Ensuite on observe que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y && (4.9)\\
&= \int_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y}\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y && (4.10)\\
&= \int_{-1}^{1}V_\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|y|)}{y}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

la seconde égalité étant justifiée par le fait que $y \mapsto y^{-1}\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)$ est impaire et donc d'intégrale nulle. Par application du théorème de convergence dominée sur l'intégrale $\int_{-1}^1 V_\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)\mathrm{d}y$ (correctement grâce à la domination $|V_\varphi(y)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|y|)| \leqslant |V_\varphi(y)|$), on obtient donc que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 V_\varphi(x)\mathrm{d}x = \langle\,\mathtt{VP}\,|\,\varphi\rangle,$$

qui est le résultat souhaité.

III-4e Soit $x \neq 0$. On observe que $\ell_0'(x) = |x|^{-1}\mathbf{sgn}(x) = x^{-1}$. Donc $(\ell_0(x)\varphi(x))' = x^{-1}\varphi(x) + \ell_0(x)\varphi'(x)$. On a donc

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\varphi(\varepsilon)\log(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty}\varphi'(x)\log|x|\mathrm{d}x$$

$$\text{et} \quad \int_{-\infty}^{-\varepsilon} x^{-1}\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(-\varepsilon)\log(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\log|x|\mathrm{d}x,$$

ce qui entraîne le premier point.

Comme $\varphi' \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $\varphi'\ell_0$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ (comme montré à la question **III-3)**. Par convergence dominée, on obtient donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\log(|x|)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\ell_0(x)\mathrm{d}x = -\langle T'_{\ell_0} \mid \varphi\rangle.$$

On a par ailleurs par Taylor à l'ordre 1

$$\begin{aligned} \varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) &= \varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon) - \big(\varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon)\big) \qquad (4.11) \\ &= -2\varepsilon\varphi'(0) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\log(\varepsilon) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\Big)\log(\varepsilon) = 0\ .$$

On a donc $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1}\varphi(x)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\mathrm{d}x = \langle T'_{\ell_0} \mid \varphi\rangle$ ce qui permet de conclure grâce à la question précédente.

III-4f Pour tout réel $r > 0$ et toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} \varphi'(x)\mathtt{sgn}(x)\mathrm{d}x &= -\int_{-r}^{0} \varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{r} \varphi'(x)\mathrm{d}x \qquad (4.12) \\ &= -(\varphi(0) - \varphi(-r)) + \varphi(r) - \varphi(0) \qquad (4.13) \\ &= \varphi(-r) + \varphi(r) - 2\varphi(0). \end{aligned}$$

On en déduit, puisque φ est nulle en $\pm\infty$, que

$$\langle T'_{\mathtt{sgn}} \mid \varphi\rangle = -\langle T_{\mathtt{sgn}} \mid \varphi'\rangle = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \varphi'(x)\mathtt{sgn}(x)\mathrm{d}x = 2\varphi(0),$$

ce qui est le premier résultat souhaité.

On a $\ell = \ell_0 + i\frac{\pi}{2}\mathtt{sgn}$. On voit facilement par linéarité de l'intégrale que $T_\ell = T_{\ell_0} + +i\frac{\pi}{2}T_{\mathtt{sgn}}$. Il est ensuite facile, par dualité et linéarité de l'intégrale de voir que $T'_\ell = T'_{\ell_0} + i\frac{\pi}{2}T'_{\mathtt{sgn}}$ (ou tout simplement en appliquant les résultats au programme : la dérivation est linéaire), ce qui donne bien le résultat voulu grâce à la question **4e)**.

III-4g On a

$$\begin{aligned}
\langle T_{q_\varepsilon} \mid \varphi\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{i\varphi(x)}{ix+\varepsilon}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\varphi(x)}{ix+\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x && (4.14)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)(x+i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x && (4.15)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + i\varepsilon\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x && (4.16)\\
&= \int_{-1}^{1} \frac{(\varphi(x)-\varphi(0))x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + i\varepsilon\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

car $x \mapsto x(x^2+\varepsilon^2)^{-1}$ est impaire donc d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. Cela entraîne l'égalité voulue. Par convergence dominée, on obtient facilement

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{-1}^{1} V_\varphi(x)\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x\Big)$$

$$= \int_{-1}^{1} V_\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x = \langle \mathtt{VP} \mid \varphi\rangle$$

et on en déduit que $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle T_{q_\varepsilon} \mid \varphi\rangle = \langle \mathtt{VP} + i\pi\delta_0 \mid \varphi\rangle$ grâce à la question **4a)** qui permet de gérer l'intégrale $i\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x$.

III-5a Le résultat de la question **III-3** l'affirme par exemple, puisque $\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+}$ est bornée et continue sauf en 0.

III-5b On a

$$\widehat{Y_\varepsilon}(x) = \lim_{r\to+\infty} 2\pi\int_0^r e^{-2\pi\varepsilon t-2i\pi tx}\mathrm{d}t = \lim_{r\to+\infty}\big[-e^{-2\pi\varepsilon t-2i\pi tx}/(ix+\varepsilon)\big]_0^{2\pi r} = \frac{1}{ix+\varepsilon}\,.$$

puisque $|e^{-2\pi\varepsilon t-2i\pi tx}| = e^{-2\pi\varepsilon t} \to 0$ quand $t\to+\infty$.

III-5c Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On a $\langle T_{Y_\varepsilon} \mid \varphi\rangle = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-2\pi\varepsilon t}\varphi(t)\mathrm{d}t$.
Comme à t fixé, $\lim_{\varepsilon\to 0} e^{-2\pi\varepsilon t}\varphi(t) = \varphi(t)$, et que $|e^{-2\pi\varepsilon t}\varphi(t)| \leqslant |\varphi(t)|$ où φ est intégrable, le théorème de convergence dominée assure que $\lim_{\varepsilon\to 0}\langle T_{Y_\varepsilon} \mid \varphi\rangle = 2\pi\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t = \langle T_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} \mid \varphi\rangle$ comme voulu.

III-5d Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$: on rappelle que $\widehat{\varphi}$ est également dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{T}_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} | \varphi\rangle &= \langle T_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} | \widehat{\varphi}\rangle && (4.17)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle T_{Y_\varepsilon} \mid \widehat{\varphi}\rangle \text{ par } \mathbf{5c} && (4.18)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle \widehat{T_{Y_\varepsilon}} \mid \varphi\rangle \text{ par continuité de la transformation de Fourier} && (4.19)\\
&= i^{-1}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle T_{q_\varepsilon} \mid \varphi\rangle \text{ par } \mathbf{5b} \text{ et la propriété de compatibilité } \widehat{T_{Y_\varepsilon}} = T_{\widehat{Y_\varepsilon}} && (4.20)\\
&= i^{-1}\langle T'_\ell \mid \varphi\rangle \text{ par } \mathbf{4g},
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Partie IV.

IV-1a Par sigma-additivité, on a

$\mathbf{P}(q\mathbf{N}^*) = \mathbf{P}(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}\{nq\}) = \sum_{n\geqslant 1}\mathbf{P}(\{qn\}) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\zeta(\sigma)q^\sigma n^\sigma} = \frac{1}{q^\sigma}$.

IV-1b Soit $k\geqslant 2$ et des entiers $n_k > \ldots > n_1 \geqslant 1$. On a donc

$$\mathbf{P}\big(A_{n_1}\cap\ldots\cap A_{n_k}\big) = \mathbf{P}\big((p_{n_1}\mathbf{N}^*)\cap\ldots\cap(p_{n_k}\mathbf{N}^*)\big) = \mathbf{P}\big(p_{n_1}\ldots p_{n_k}\mathbf{N}^*\big)$$

puisque, les p_i étant des nombres premiers deux à deux distincts, un entier est divisible par tous les p_i si et seulement s'il est divisible par leur produit. La question **IV-1a)** avec $q = p_{n_1}\ldots p_{n_k}$ implique que

$$\mathbf{P}\big(p_{n_1}\ldots p_{n_k}\mathbf{N}^*\big) = \frac{1}{q^\sigma} = \frac{1}{p_{n_1}^\sigma}\cdots\frac{1}{p_{n_k}^\sigma}\ .$$

La même question implique donc que

$$\frac{1}{p_{n_1}^\sigma}\cdots\frac{1}{p_{n_k}^\sigma} = \mathbf{P}\big(p_{n_1}\mathbf{N}^*\big)\ldots\mathbf{P}\big(p_{n_k}\mathbf{N}^*\big).$$

On a donc montré que pour tout $k\geqslant 1$ et tous entiers $n_k > \ldots > n_1 \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}\big(A_{n_1}\cap\ldots A_{n_k}\big) = \mathbf{P}(A_{n_1})\ldots\mathbf{P}(A_{n_k})\ .$$

ce qui est le résultat voulu.

IV-1c On a, d'abord parce que 1 est le seul entier naturel divisible par aucun nombre premier, ensuite par limite monotone

$$\frac{1}{\zeta(\sigma)} = \mathbf{P}(\{1\}) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}A_n^c\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big(A_1^c\cap\ldots\cap A_n^c\big)\ .$$

À la question **1b)** on a montré l'indépendance des événements $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et le cours affirme que les $(A_n^c)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont indépendants également : ceci donne

$$\mathbf{P}\big(A_1^c\cap\ldots\cap A_n^c\big) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\big(A_k^c\big).$$

Or $\mathbf{P}(A_n^c) = 1-\mathbf{P}(A_n) = 1-p_n^{-\sigma}$. Donc finalement

$$\frac{1}{\zeta(\sigma)} = \lim_{n\to\infty}\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\big(1-p_k^{-\sigma}\big)$$

qui entraîne facilement le résultat voulu par continuité sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction inverse.

IV-2 Par continuité du logarithme sur $\mathbf{R}_+^*$ et la stricte positivité de ζ sur $]1,\infty[$, on observe tout d'abord que

$$\log \zeta(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\prod_{1\leqslant k\leqslant n} \left(1-p_n^{-\sigma}\right)^{-1}\right).$$

Or $\log\left(\prod_{1\leqslant k\leqslant n} \left(1-p_n^{-\sigma}\right)^{-1}\right) = -\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \log\left(1-p_k^{-\sigma}\right)$. Donc

$$\log \zeta(\sigma) = -\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \log\left(1-p_k^{-\sigma}\right) = -\sum_{n\geqslant 1} \log\left(1-p_n^{-\sigma}\right).$$

Puisque ζ est C^1, la dérivée de $-\log\circ\zeta$ en σ est donc $-\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$. On observe d'autre part que

- pour tout $n\geqslant 1$, la fonction $\sigma\mapsto \log\left(1-p_n^{-\sigma}\right)$ est C^1 sur $]1,\infty[$ de dérivée $(1-p_n^{-\sigma})^{-1}p_n^{-\sigma}\log p_n$,
- Soit $\sigma_0>1$ et on fixe $\sigma\in[\sigma_0,+\infty[$. On observe que $p_n\geqslant 2$ et donc $p_n^{-\sigma}\leqslant 2^{-\sigma}\leqslant 2^{-1}$. Par conséquent, $1-p_n^{-\sigma}\geqslant 1/2$ et $(1-p_n^{-\sigma})^{-1}\leqslant 2$. Donc

$$0\leqslant \frac{p_n^{-\sigma}\log p_n}{1-p_n^{-\sigma}} \leqslant 2p_n^{-\sigma}\log p_n \leqslant (p_n^{-(\sigma_0-1)/2}\log p_n)p_n^{-(\sigma_0+1)/2}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} p_n^{-(\sigma_0-1)/2}\log p_n=0$, on pose $K_{\sigma_0}=\sup_{n\in\mathbf{N}^*} p_n^{-(\sigma_0-1)/2}\log p_n$ qui est une quantité finie et on a pour tout $\sigma\in[\sigma_0,+\infty[$,

$$0\leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\log\left(1-p_n^{-\sigma}\right)\leqslant K_{\sigma_0}p_n^{-(\sigma_0+1)/2}.$$

Comme la série de terme général $(p_n^{-(\sigma_0+1)/2})$ converge (elle est à termes positifs et elle majorée par $\zeta((\sigma_0+1)/2)$), on a donc convergence normale sur $[\sigma_0,+\infty[$ de la série des dérivées.
Le critère de dérivation terme à terme des séries des fonctions implique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\sum_{n\geqslant 1}\log\left(1-p_n^{-\sigma}\right)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\log\left(1-p_n^{-\sigma}\right),$$

ce qui permet de conclure.

IV-3 Pour tout $m\in\mathbf{N}^*$, on pose $S_m=\{p_m^k\,;\,k\in\mathbf{N}^*\}$ et $S_0=\mathbf{N}^*\setminus\bigcup_{m\geqslant 1}S_m$. On observe que $(S_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est une partition de $\mathbf{N}^*$. Par théorème de sommation par paquets des familles à termes positifs , on a pour tout réel $\sigma>1$,

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*}\Lambda(n)n^{-\sigma}=\sum_{m\in S_0}\Lambda(m)m^{-\sigma}+\sum_{m\geqslant 1}\left(\sum_{n\in S_m}\Lambda(n)n^{-\sigma}\right).$$

Or pour tout $n\in S_0$, $\Lambda(n)=0$ et pour tout entier $m\geqslant 1$, on a

$$\sum_{n\in S_m}n^{-\sigma}\Lambda(n)=\sum_{k\geqslant 1}p_m^{-k\sigma}\log p_m=\frac{1}{p_m^{\sigma}}\log p_m\frac{1}{1-p_m^{-\sigma}}=\frac{\log p_m}{p_m^{\sigma}-1}.$$

On a donc

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \Lambda(n)n^{-\sigma} = \sum_{m\geqslant 1} \frac{\log p_m}{p_m^\sigma - 1}$$

et la question précédente implique que $\Phi(\sigma) = -\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$.

IV-4a À l'aide du développement en série entière du logarithme, valide pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant -\log(1-x) - x &= \sum_{k\geqslant 2} \tfrac{1}{k}x^k = \tfrac{1}{2}x^2 \sum_{l\geqslant 0} \tfrac{2}{l+2}x^l && (4.21)\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}x^2 \sum_{l\geqslant 0} x^l = \tfrac{1}{2}x^2 \frac{1}{1-x} && (4.22)\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}x^2 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = x^2, \end{aligned}$$

qui est bien l'inégalité voulue.

IV-4b Pour tout réel $\sigma > 1$, la question **IV-2)** implique que

$$f(\sigma) = \sum_{n\geqslant 1} \big(- p_n^{-\sigma} - \log(1-p_n^{-\sigma})\big) .$$

Comme $p_n^{-\sigma} \in [0,1/2]$, l'inégalité précédente implique que

$$0 \leqslant f(\sigma) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} p_n^{-2\sigma} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} p_n^{-2} \leqslant \sum_{m\geqslant 1} m^{-2} .$$

Cela montre que f est positive et majorée sur $]1,+\infty[$. On observe ensuite que $x \in [0,1/2] \mapsto -\log(1-x) - x = \sum_{k\geqslant 2} k^{-1}x^k$ est une fonction croissante (par somme d'une série de fonctions croissantes). On en déduit que $\sigma \in]1,+\infty[\mapsto -p_n^{-\sigma} - \log(1-p_n^{-\sigma})$ est décroissante. Cela implique que f est décroissante.

IV-4c Pour tout $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$\log\sigma^{-1} - Z(1+\sigma) = f(1+\sigma) - \log(\sigma\zeta(1+\sigma)) .$$

Par la question précédente, on pose $C = \sup_{\sigma>0} f(1+\sigma)$: ceci est une quantité finie et on a

$$-\log(\sigma\zeta(1+\sigma)) \leqslant \log\sigma^{-1} - Z(1+\sigma) \leqslant -\log(\sigma\zeta(1+\sigma)) + C$$

et donc tout $\sigma \in]0,1[$,

$$-\frac{-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))}{\log\sigma^{-1}} \leqslant 1 - \frac{Z(1+\sigma)}{\log\sigma^{-1}} \leqslant \frac{C - \log(\sigma\zeta(1+\sigma))}{\log\sigma^{-1}} .$$

Par la question **I-2b)**, $\lim_{\sigma\to 0^+} \log(\sigma\zeta(1+\sigma)) = 0$ et comme $\lim_{\sigma\to 0^+}\log\sigma^{-1} = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{-\log(\sigma\zeta(1+\sigma))}{\log\sigma^{-1}} = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{C - \log(\sigma\zeta(1+\sigma))}{\log\sigma^{-1}} = 0 .$$

Par le principe de l'encadrement,
$$\lim_{\sigma\to 0^+} \frac{Z(1+\sigma)}{\log \sigma^{-1}} = 1\ ,$$
qui est le résultat voulu.

IV-4d On veut appliquer ($\mathcal{E}q_6$) à $a_n = n^{-1}\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(n)$ et $\lambda_n = \log n$. Pour tout réel $\sigma > 0$, on a bien
$$D(\sigma) = \sum_{n\geqslant 1} a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \sum_{n\geqslant 1} p_n^{-1-\sigma} = Z(1+\sigma)\ .$$
La question précédente montre que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on a
$$\frac{D(p\sigma)}{D(\sigma)} = \frac{\log \sigma^{-1}}{\log p^{-1} + \log \sigma^{-1}} \cdot \frac{\log\left((p\sigma)^{-1}\right) Z(1+p\sigma)}{\log\left(\sigma^{-1}\right) Z(1+\sigma)} \xrightarrow[\sigma\to 0^+]{} 1$$
et donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfont l'hypothèse (H_0) de ($\mathcal{E}q_6$) ce qui permet d'affirmer que
$$\lim_{n\to+\infty} D(1/\log n)^{-1} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^{-1}\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(k) = 1\ .$$
Or on a montré que $\lim_{\sigma\to 0^+} D(1/\sigma)/\log \sigma^{-1} = 1$ donc $D(1/\log n) \sim \log\log n$, ce qui permet de conclure.

Partie V.

V-1a Pour tout entier $k \geqslant 1$, l'inégalité triangulaire implique que $|Z(ks)| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |p_n^{-ks}| = \sum_{n\geqslant 1} p_n^{-k\mathrm{Re}(s)}$.
Par théorème de Fubini pour les séries positives, on a *a priori* dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ d'abord
$$\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{kp_n^{k\mathrm{Re}(s)}} = \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{kp_n^{k\mathrm{Re}(s)}} = \sum_{n\geqslant 1} -\log\left(1-p_n^{-\mathrm{Re}(s)}\right) = -\log\zeta(\mathrm{Re}(s))$$
en appliquant le résultat de la question **IV-2)**. Cela montre bien que la série de terme général $(k^{-1}Z(ks))_{k\in\mathbf{N}^*}$ est absolument convergente (pusique $-\log\zeta(\mathrm{Re}(s))$ est une quantité finie) et que $\sum_{k\geqslant 1} k^{-1}|Z(ks)| \leqslant -\log\zeta(\mathrm{Re}(s))$.

V-1b Soit K un compact tel que $K \subset \mathbf{H}_1$. Comme $\mathrm{Re}(\cdot)$ est continue (car linéaire), elle atteint son infimum sur K : il existe $s_0 \in K$ tel que $\mathrm{Re}(s_0) = \min_{s\in K} \mathrm{Re}(s)$. On pose $\sigma_0 = \mathrm{Re}(s_0)$. Puisque $s_0 \in K$, $s_0 \in \mathbf{H}_1$ et donc $\mathrm{Re}(s_0) = \sigma_0 > 1$.
Pour tout $s \in K$ et tout entier $k \geqslant 1$, on observe d'une part, par l'inégalité triangulaire, que $k^{-1}|Z(ks)| \leqslant k^{-1}Z(k\mathrm{Re}(s)) \leqslant k^{-1}Z(k\sigma_0)$ terme général d'une série convergence d'après **1a)** (car $\sum_{k\geqslant 1} k^{-1}Z(k\sigma_0) = -\log\zeta(\sigma_0) < +\infty$ puisque $\sigma_0 > 1$).

Par ailleurs, pour tout entier $k \geqslant 1$, $s \mapsto k^{-1}Z(ks)$ est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$. Donc L est une série de fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}_1$ convergeant normalement sur tout compact $K \subset \mathbf{H}_1$: on en déduit que $s \mapsto L(s) = \sum_{k\geqslant 1} k^{-1}Z(ks)$ est bien holomorphe sur $\mathbf{H}_1$.

Variante : On peut également s'appuyer sur le théorème d'holomorphie pour les intégrales à paramètres, avec la mesure discrète $\mu = \sum_{(k,p)\in\mathbf{N}^*\times\mathscr{P}} \frac{1}{k}\delta_{(k,p)}$ de $\Omega = \mathbf{N}^* \times \mathscr{P}$, en écrivant $L(s) = \int_\Omega p^{-ks}\mathrm{d}\mu(k,p)$.

V-1c Pour tout $s \in \mathbf{H}_1$, on pose $f(s) = \exp L(s)$. Comme exp est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et comme L est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$, f, par composition d'applications holomorphes ainsi que cela est rappelé en début de problème, est également une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_1$. Par ailleurs, pour tout réel $\sigma > 1$, le théorème de Fubini pour les sommes positives implique que

$$L(\sigma) = \sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{kp_n^{k\sigma}} = \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{kp_n^{k\sigma}} = \sum_{n\geqslant 1} -\log\left(1-p_n^{-\sigma}\right) = -\log\zeta(\sigma) \ .$$

Autrement dit, la fonction $f - \zeta$ qui est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$, s'annule sur l'ensemble $]1, +\infty[$ qui contient des points d'accumulation dans l'ouvert $\mathbf{H}_1$. Comme $\mathbf{H}_1$ est connexe, le principe des zéros isolés implique que $f = \zeta$, qui est le résultat désiré.

V-1d L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$.

V-1e La fonction ζ est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$, donc sa dérivée aussi. Comme elle ne s'annule pas sur $\mathbf{H}_1$, le quotient$-\zeta'/\zeta$ est holomorphe sur $\mathbf{H}_1$. C'est aussi le cas de Φ comme démontré à la question **I-8)**. Or la question **IV-3)** montre $\zeta'/\zeta + \Phi$ s'annule sur l'ensemble $]1, +\infty[$ qui contient des points d'accumulation dans l'ouvert $\mathbf{H}_1$ (tout point de $]1, +\infty[$ en fait). Comme $\mathbf{H}_1$ est connexe, le principe des zéros isolés implique que $-\zeta'/\zeta = \Phi$ sur $\mathbf{H}_1$, qui est le résultat désiré.

V-2a On observe que $v_n(s) = n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s}\mathrm{d}x$. La série de terme général (n^{-s}) est absolument convergente par la règle de Riemann ($|n^{-s}| = n^{-\mathrm{Re}(s)}$) ; par ailleurs, la série de terme général $\int_n^{n+1} x^{-s}\mathrm{d}x$ est télescopique, de somme partielle d'ordre n égale à $\int_1^{n+1} x^{-s}\mathrm{d}x = \frac{1}{s-1} - \frac{(n+1)^{-s}}{s-1}$ qui tend vers $\frac{1}{s-1}$. D'où le résultat par différence.

V-2b On procède à une intégration par parties dans la définition de $v_n(s)$, en dérivant $x \mapsto n^{-s} - x^{-s}$ et en primitivant la fonction constante égale à 1 en $x \mapsto x - (n+1)$, ce qui entraîne bien que $v_n(s) = s\int_n^{n+1}(\lceil x\rceil - x)x^{-1-s}\mathrm{d}x$, puisque le crochet est nul.

Il est ensuite clair que $|(\lceil x\rceil - x)x^{-1-s}| \leqslant x^{-1-\mathrm{Re}(s)}$. Comme $x \mapsto x^{-1-\mathrm{Re}(s)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit que $x \in [1, +\infty[\mapsto (\lceil x\rceil - x)x^{-1-s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Les questions précédentes montrent alors que

$$\begin{aligned} s\int_1^{+\infty} (\lceil x\rceil - x)\, x^{-1-s}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} s\int_1^{n+1} (\lceil x\rceil - x)\, x^{-1-s}\mathrm{d}x && (4.23)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \int_k^{k+1} (\lceil x\rceil - x)\, x^{-1-s}\mathrm{d}x && (4.24)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} v_k(s) && (4.25)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité.

V-2c On observe que pour tout $s \in \mathbf{H}_0$, $|(\lceil x \rceil - x)x^{-1-s}| \leqslant x^{-1-\mathrm{Re}(s)}$. Comme $x \mapsto x^{-1-\mathrm{Re}(s)}$ est (continue et) intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit que $x \in [1, +\infty[\mapsto (\lceil x \rceil - x)x^{-1-s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour tout $s \in \mathbf{H}_0$, on peut donc poser $f(s) = \int_1^{+\infty} (\lceil x \rceil - x)\, x^{-1-s} \mathrm{d}x$.

Soit K un compact tel que $K \subset \mathbf{H}_0$. Comme vu précédemment, il existe $\sigma_0 > 0$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0$ pour tout $s \in K$ et donc pour tout $s \in K$ et tout $x \in [1, +\infty[$, on a $|(\lceil x \rceil - x)x^{-1-s}| \leqslant x^{-1-\mathrm{Re}(s)} \leqslant x^{-1-\sigma_0}$ avec $x \mapsto x^{-1-\sigma_0}$ intégrable sur $[1, +\infty[$.

De plus pour tout $x \in [1, +\infty[$, $s \mapsto x^{-1-s}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ donc en particulier sur $\mathbf{H}_0$.

Ainsi, le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètre s'applique et permet d'affirmer que f est holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_0$. Il est est de même pour $s \mapsto sf(s)$ qui coïncide avec $s \mapsto \zeta(s) - (s-1)^{-1}$ sur $\mathbf{H}_1$ d'après **2b)**. Le principe des zéros isolés ($\mathbf{H}_0$ est connexe) montre que $s \mapsto sf(s)$ est l'unique fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_0$ prolongeant $s \in \mathbf{H}_1 \mapsto \zeta(s) - (s-1)^{-1}$, ce qui est bien ce que l'on devait montrer.

V-3a On a $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. Donc $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) && (4.26)\\
&= (2\cos^2(\theta) - 1)\cos(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^2(\theta) && (4.27)\\
&= (2\cos^2(\theta) - 1)\cos(\theta) - 2\cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) && (4.28)\\
&= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
q(\theta) &= 5 + 8\cos(\theta) + 4\cos(2\theta) + \cos(3\theta) && (4.29)\\
&= 5 + 8\cos(\theta) + 4(2\cos^2(\theta) - 1) + 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) && (4.30)\\
&= 4\cos^3(\theta) + 8\cos^2(\theta) + 5\cos(\theta) + 1 && (4.31)
\end{aligned}$$

La racine $-1 = \cos(\pi)$ est évidente. On factorise donc l'expression précédente par $1 + \cos(\theta)$

$$\begin{aligned}
q(\theta) &= 4(\cos^3(\theta) + \cos^2(\theta)) - 4\cos^2(\theta) + 8\cos^2(\theta) + 5\cos(\theta) + 1 && (4.32)\\
&= 4(\cos^3(\theta) + \cos^2(\theta)) + 4(\cos^2(\theta) + \cos(\theta)) - 4\cos(\theta) + 5\cos(\theta) + 1 && (4.33)\\
&= 4(\cos^3(\theta) + \cos^2(\theta)) + 4(\cos^2(\theta) + \cos(\theta)) + \cos(\theta) + 1 && (4.34)\\
&= (\cos(\theta) + 1)\big(4\cos^2(\theta) + 4\cos(\theta) + 1\big) && (4.35)\\
&= (\cos(\theta) + 1)(2\cos(\theta) + 1)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Remarque : Il est également possible d'écrire $\cos k\theta = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^k)$ et développer par le binôme de Newton l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^k$, en remplaçant les $\sin^{2\ell}\theta$ ainsi produits par $(1 - \cos^2\theta)^\ell$.

V-3b Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on pose $r(\theta) = 5 + 8e^{-i\theta} + 4e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}$ si bien que $\mathrm{Re}(r(\theta)) = q(-\theta) = q(\theta)$. On observe que pour tous entiers $n, k \geqslant 1$ on a $p_n^{-k(\sigma+it)} = p_n^{-k\sigma} \exp(-itk\log p_n)$. Donc

$$p_n^{-k\sigma} + 8p_n^{-k(\sigma+it)} + 4p_n^{-k(\sigma+2it)} + p_n^{-k(\sigma+3it)} = p_n^{-k\sigma} r\big(tk\log p_n\big)\ .$$

La question **V-1c)** implique alors que

$$\zeta(\sigma)^5\zeta(\sigma+it)^8\zeta(\sigma+2it)^4\zeta(\sigma+3it)=\exp\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{r(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\Big).$$

Comme la partie réelle est linéaire (et donc également continue) on a

$$|\zeta(\sigma)^5\zeta(\sigma+it)^8\zeta(\sigma+2it)^4\zeta(\sigma+3it)|=\exp\Big(\mathrm{Re}\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{r(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\Big)\Big) \tag{4.36}$$

$$=\exp\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{Re}(r(kt\log p_n))}{kp_n^{k\sigma}}\Big) \tag{4.37}$$

$$=\exp\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{q(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\Big).$$

Comme $q(kt\log p_n))/(kp_n^{k\sigma})\geqslant 0$, d'après la question précédente, on a

$$\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{q(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\geqslant 0 \quad \text{et donc} \quad \exp\Big(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1}\frac{q(kt\log p_n)}{kp_n^{k\sigma}}\Big)\geqslant \exp(0)=1\ ,$$

ce qui permet de conclure.

V-3c On écrit pour $\sigma>1$
$\zeta(\sigma)\zeta(\sigma+it_0)=(\sigma-1)\zeta(\sigma)\frac{\zeta(\sigma+it_0)-\zeta(1+it_0)}{\sigma-1}\to 1.\zeta'(1+it_0)$ par **I-2b**.
On poursuit alors en regroupant les termes :
$(\zeta(\sigma)|\zeta(\sigma+it_0)|)^5\times|\zeta(\sigma+it_0)|^3\times\zeta(\sigma+2it_0)^4|\zeta(\sigma+3it_0)|\to 0$ quand $\sigma\to 1^+$ par produit de limite (le 2nd terme $|\zeta(\sigma+it_0)|^3$ tend en effet vers 0 tandis que tous les autres ont une limite finie). Ceci contredit la minoration par 1 obtenue en **3b**.

V-4a Par **V-2b**, on a
$|\zeta(\sigma+it)|\leqslant\frac{1}{|\sigma-1+it|}+|\sigma+it|\int_1^{+\infty}|\lceil x\rceil-x|\,|x^{-1-\sigma-it}|\mathrm{d}x$ par inégalité triangulaire
$\leqslant\frac{1}{|t|}+(\sigma+|t|)\int_1^{+\infty}x^{-1-\sigma}\ \mathrm{d}x$ vu que $|\sigma-1+it|^2=(\sigma-1)^2+t^2\geqslant t^2$
$\leqslant 1+\frac{\sigma+|t|}{\sigma}=2+\sigma^{-1}|t|\leqslant 2+|t|\leqslant 3|t|$ en calculant l'intégrale et en usant que σ et $|t|$ sont $\geqslant 1$
ce qui est l'inégalité voulue.

V-4b On dérive l'équation 10 (correctement par théorème de dérivation holomorphe sous le signe intégrale) pour obtenir pour tout $s\in\mathbf{H}_1$

$$\zeta'(s)=-\frac{1}{(s-1)^2}+\int_1^{+\infty}(\lceil x\rceil-x)\,x^{-1-s}\mathrm{d}x-s\int_1^{+\infty}(\lceil x\rceil-x)\,x^{-1-s}\log x\mathrm{d}x\ .$$

En argumentant comme dans la question précédente on obtient

$$|\zeta'(\sigma+it)|\leqslant\frac{1}{|\sigma-1+it|^2}+\int_1^{+\infty}x^{-1-\sigma}\mathrm{d}x+|\sigma+it|\int_1^{+\infty}x^{-1-\sigma}\log x\mathrm{d}x \tag{4.38}$$

$$=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{\sigma}+(\sigma+|t|)\int_1^{+\infty}x^{-1-\sigma}\log x\mathrm{d}x\ .$$

On procède alors à une intégration par parties (correcte par convergence du crochet) qui donne

$$\int_1^{+\infty} x^{-1-\sigma}\log x\mathrm{d}x = \big[-\sigma^{-1}x^{-\sigma}\log x\big]_1^{+\infty} + \frac{1}{\sigma}\int_1^{+\infty} x^{-1-\sigma}\mathrm{d}x$$

et donc

$$|\zeta'(\sigma+it)| \leqslant \frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sigma} + \frac{\sigma+|t|}{\sigma^2} \leqslant 3 + \sigma^{-2}|t| \leqslant 3 + |t| \leqslant 4|t|\ ,$$

qui est l'inégalité voulue.

V-5a C'est une conséquence immédiate de l'égalité

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\zeta(x+it)}\right) = -\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta^2(x+it)}$$

et du théorème fondamental du calcul intégral.

V-5b On procède comme en **I-2b)** :

$$0\leqslant\zeta(\sigma+1)-1-2^{-1-\sigma} = \sum_{n\geqslant 2}(n+1)^{-1-\sigma} \leqslant \sum_{n\geqslant 2}\int_n^{n+1} x^{-1-\sigma}\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} x^{-1-\sigma}\mathrm{d}x = \frac{2^{-\sigma}}{\sigma},$$

ce qui est la première inégalité voulue. Comme $\sigma \geqslant 1$, on a

$$0\leqslant\zeta(\sigma+1)-1 \leqslant 2^{-1-\sigma} + \sigma^{-1}2^{-\sigma} \leqslant 2^{-2}+2^{-1} = \tfrac{3}{4}\ .$$

On a ensuite

$$|\zeta(\sigma+1+it)| = |1+(\zeta(\sigma+1+it)-1)| \geqslant 1 - |\zeta(\sigma+1+it)-1|$$

Or

$$|\zeta(\sigma+1+it)-1| = \Big|\sum_{n\geqslant 2} n^{-\sigma-1-it}\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 2}|n^{-\sigma-1-it}| = \sum_{n\geqslant 2} n^{-\sigma-1} = \zeta(\sigma+1)-1 \leqslant \tfrac{3}{4}$$

et donc

$$|\zeta(\sigma+1+it)| \geqslant 1 - |\zeta(\sigma+1+it)-1| \geqslant 1-\tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4},$$

qui implique l'inégalité voulue.

V-5c On part de **V-3b** que l'on écrit en prenant la racine quatrième

$$(*)\ |\zeta(x+it)|^{-2} \leqslant \zeta(x)^{5/4}|\zeta(x+2it)|.|\zeta(x+3it)|^{1/4}$$

En utilisant **V-4a**, on obtient $|\zeta(x+2it)| \leqslant 3.2|t|$ et $|\zeta(x+3it)| \leqslant 3.3|t|$;
par ailleurs par encadrement série-intégrale, on a (pour $x \in]1,3]$)

$$\zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} t^{-x}dt = 1 + 1/(x-1) = x/(x-1) \leqslant 3/(x-1),$$

ce qui donne, en réinjectant ceci dans $(*)$
$|\zeta(x+it)|^{-2} \leqslant (3/(x-1))^{5/4}.3.2|t|.(3.3|t|)^{1/4} = 2.3^{11/4}|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}$ comme voulu.

V-5d Pour ce faire, on part de **V-5a** : l'inégalité triangulaire donne
$|\zeta(\sigma+it)|^{-1} \leqslant 4+\int_\sigma^{\sigma+1}\left|\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta(x+it)^2}\right|dx \leqslant 4+4|t|\times C.|t|^{5/4}\int_\sigma^{\sigma+1}(x-1)^{-5/4}dx$ en notant $C=2.3^{11/4}$: on s'est servi ici de la majoration $|\zeta'(x+it)|\leqslant 4|t|$ vue en **5b)** et de la majoration $|\zeta(x+it)|^{-2}\leqslant C|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}$ obtenue à la question **5c**.
On primitive $(x-1)^{-5/4}$ en $-4(x-1)^{-1/4}$ et la première majoration vient.
Comme le 2ème terme est clairement plus grand que 4 (produit de $2^5\geqslant 2^2$ et de termes tous $\geqslant 1$), on peut conclure quant à la dernière inégalité en prenant le double du plus grand terme).

V-5e L'idée est la suivante : on procède comme **5-d)**, en utilisant la majoration $|\zeta(x+it)|^{-1}\leqslant C|t|^{9/4}(x-1)^{-1/4}$ (au lieu de la majoration $|\zeta(x+it)|^{-1}\leqslant C|t|^{9/4}(x-1)^{-5/4}$ obtenue en **5c)**). En élevant au carré, un $(x-1)^{-1/2}$ apparaît, qui se primitive en $2(x-1)^{1/2}$: c'est ainsi qu'un terme borné vis à vis de x apparaît enfin.
La petite difficulté qu'il faut lever est que pour obtenir in fine une majoration uniforme en $\sigma\in]1,2]$, on a besoin d'intégrer **5d)** selon $x\in[\sigma,\sigma+1]$: la variable d'intégration x varie entre 1 et 3, et donc **5d** doit être connue pour $\sigma\in]1,3]$. Reprenons donc :
- Les inégalités de **5b)** sont valides pour tous $\sigma\geqslant 1$ et $t\in\mathbf{R}$
- Concernant **5c)**, prenons $x\in]1,4]$. Les majorations $|\zeta(x+2it)|\leqslant 3.2|t|$ et $|\zeta(x+3it)|\leqslant 3.3|t|$ demeurent vraies ; il faut par contre adapter l'encadrement série intégrale puisqu'on a (pour $x\in]1,4]$)

$$\zeta(x)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}t^{-x}dt = 1+1/(x-1)=x/(x-1)\leqslant 4/(x-1),$$

ce qui donne en procédant comme en **5c)** ci dessus
$|\zeta(x+it)|^{-2}\leqslant (4/(x-1))^{5/4}.3.2|t|.(3.3|t|)^{1/4}=2^{7/2}.3^{6/4}|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}$ pour tout $x\in]1,4]$.
- On en déduit la version attendue de **5d)**, valide pour $\sigma\in]1,3]$ cette fois, en procédant comme on l'avait fait en **5d)**, partant de **5a)** et en usant des majorations $|\zeta'(x+it)|\leqslant 4|t|$ du **5b)** et $|\zeta(x+it)|^{-2}\leqslant C|t|^{5/4}(x-1)^{-5/4}$ qu'on vient d'obtenir pour tout $x\in]1,4]$ et $|t|\geqslant 1$:
$|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 4+\int_\sigma^{\sigma+1}\left|\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta(x+it)^2}\right|dx\leqslant 4+4|t|\times C.|t|^{5/4}\int_\sigma^{\sigma+1}(x-1)^{-5/4}dx$ avec cette fois $C=2^{7/2}.3^{6/4}$.
On obtient ainsi, pour tout $\sigma\in]1,3]$ cette fois :
$|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 4+4|t|\times C.|t|^{5/4}\Big[-4(x-1)^{-1/4}\Big]_\sigma^{\sigma+1}\leqslant 4+4^2C|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}$. Encore une fois, on a $4\leqslant 4^2C|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}$ vu que $(\sigma-1)^{-1/4}\geqslant 2^{-1/4}$ et $|t|\geqslant 1$, on en tire donc $|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 2^5C|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}$ pour tout $\sigma\in]1,3]$. En posant $D=2^5C$, on en tire donc :
5d)-bis pour tout $x\in]1,3]$, $|\zeta(x+it)|^{-2}\leqslant D^2|t|^{9/2}(x-1)^{-1/2}$
Cette fois, on peut écrire en réinjectant cette inégalité **5d)**-bis que pour tout $\sigma\in]1,2]$
$|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 4+\int_\sigma^{\sigma+1}\left|\frac{\zeta'(x+it)}{\zeta(x+it)^2}\right|dx$
$\leqslant 4+4|t|\times D^2.|t|^{9/2}\int_\sigma^{\sigma+1}(x-1)^{-1/2}dx$
$=4+4D^2.|t|^{11/2}\Big[2(x-1)^{1/2}\Big]\sigma^{\sigma+1}\leqslant 4+8D^2.|t|^{7/2}$ et donc pour tout $\sigma\in]1,2]$ et tout t réel tel que $|t|\geqslant 1$

$$|\zeta(\sigma+it)|^{-1}\leqslant 4^2D^2.|t|^{11/2}$$

Ainsi le réel $M=(4D)^2$ convient.

V-5 Tout d'abord, la fonction ζ prolongée à $\mathbf{H}_0$ est en particulier continue sur l'ensemble fermé F

de la question, puisqu'elle est holomorphe au voisinage de chacun des points de F. Il en est de même pour ζ'. Comme par ailleurs ζ ne s'annule pas sur F, on en déduit que le quotient ζ'/ζ est bien défini, et donc continu par quotient, sur F.
On ne le demandait pas, mais F est bien fermé dans $\mathbf{C}$ en tant qu'image réciproque du fermé $[1, +\infty[^2$ de $\mathbf{R}^2$ par l'application $s \mapsto (\mathrm{Re}(s), |\mathrm{Im} s|)$.
Par la question **V-1e)** on a $|\Phi(\sigma + it)| = |\zeta'(\sigma + it)|/|\zeta(\sigma + it)|$. Par la question précédente et la question **V-4b)** on obtient donc

$$|\Phi(\sigma + it)| \leqslant M|t|^{11/2}|\zeta'(\sigma + it)| \leqslant 4M|t|^{13/2} ,$$

qui est l'inégalité voulue.

Partie VI.

VI-1 On observe que $\Lambda(n)e^{-nx} \leqslant e^{-nx}\log n$. La suite $(e^{-nx/2}\log n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée car elle tend vers 0. On pose $C = \max_{n\in\mathbf{N}^*} e^{-nx/2}\log n$ qui est donc une quantité positive finie et on observe que $0 \leqslant \Lambda(n)e^{-nx} \leqslant Ce^{-nx/2}$ comme la série géométrique de raison $e^{-x/2} \in]-1, 1[$ converge absolument, cela implique que la série de terme général $(e^{-nx}\Lambda(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.
Remarque : On peut également procéder par la règle de d'Alembert, ou encore écrire que $e^{-nx}\log n = \mathrm{o}(ne^{-nx})$ qui est le terme général d'une série convergente (par exemeple via la série entière dérivée $\sum nz^n$).
Soit $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Comme $x \mapsto e^{-nx}\Lambda(n)$ décroît et est positive, on a $\sup_{x\in[x_0,+\infty[} |\Lambda(n)e^{-nx}| = \Lambda(n)e^{-nx_0}$. Cela entraîne que la série de fonctions continues $x \mapsto \Lambda(n)e^{-nx}$ est normalement convergente sur $[x_0, +\infty[$, ce qui implique que φ est continue sur $[x_0, +\infty[$. Comme x_0 peut être choisi arbitrairement proche de 0, cela montre que φ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

VI-2 Soit $s \in \mathbf{H}_1$ de partie réelle σ. Soit $n \geqslant 1$. Le changement de variable $y = nx$ implique que $\int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{s-1}\mathrm{d}x = n^{-s}\Gamma(s)$; on a en particulier $\int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{\sigma-1}\mathrm{d}x = n^{-\sigma}\Gamma(\sigma)$. Par l'interversion série-intégrale des fonctions positives, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |\varphi(x)x^{s-1}|\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \varphi(x)x^{\sigma-1}\mathrm{d}x && (4.39)\\
&= \sum_{n\geqslant 1} \Lambda(n) \int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{\sigma-1}\mathrm{d}x && (4.40)\\
&= \Gamma(\sigma) \sum_{n\geqslant 1} \Lambda(n)n^{-\sigma} = \Gamma(\sigma)\Phi(\sigma)
\end{aligned}$$

qui est une quantité finie. Cela montre que $]1,+\infty[\subset D_\varphi$ et donc que $\mathcal{M}\varphi$ est bien définie sur $\mathbf{H}_1$. L'interversion série-intégrale pour des fonctions intégrables s'applique donc et montre que pour tout $s\in\mathbf{H}_1$, $\mathcal{M}\varphi(s)=\Gamma(s)\Phi(s)$.

VI-3 On fixe $\sigma\in]1,2]$. On pose $C_\sigma=\max_{t\in[-1,1]}|\Gamma(\sigma+it)\Phi(\sigma+it)|$ (par continuité sur le compact $[-1,1]$) et pour tout $t\in\mathbf{R}$ tel que $|t|\geqslant 1$, la question **V-6)** implique que $|\Phi(\sigma+it)|\leqslant 4M|t|^{13/2}$ et la question **III-1g)** appliquée à $k=8$ et $\sigma_0=2$ implique que $|\Gamma(\sigma+it)|\leqslant 2^4M_{8,2}(1+|t|)^{-8}$. On a donc, par la question précédente,

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbf{R},\quad |\mathcal{M}\varphi(\sigma+it)| &= |\Gamma(\sigma+it)\Phi(\sigma+it)| && (4.41)\\ &\leqslant C_\sigma\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)+2^6MM_{8,2}\frac{|t|^{13/2}}{(1+|t|)^8}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|t|) && (4.42)\\ &\leqslant C_\sigma\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)+2^6MM_{8,2}|t|^{-3/2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|t|)\,.\end{aligned}$$

La fonction $t\mapsto\mathcal{M}\varphi(\sigma+it)$, qui est bien entendu continue sur $\mathbf{R}$ par produit de telles fonctions, est donc intégrable sur $\mathbf{R}$.

VI-4 C'est une conséquence de l'inversion de Mellin (question **III-2c**) et du fait que $\Phi(\sigma+it)=-\zeta'(\sigma+it)/\zeta(\sigma+it)$ (question **V-1e)**.

VI-5a Le résultat de la question **V-2c** assure que l'on peut écrire $\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+f(s)$, avec f holomorphe sur $\mathbf{H}_0$. On a ainsi $\zeta'(s)=-\frac{1}{(s-1)2}+f'(s)$ pour tout $s\in\mathbf{H}_0$, et donc pour tout $s\in\mathbf{H}_0$ on a $h(s)=\frac{(s-1)f'(s)+f(s)}{(s-1)\zeta(s)}$, qui est donc un quotient de fonctions continues sur l'ensemble fermé F des s de partie réelle $\geqslant 1$ (en tant que quotient de fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}_0$), dont le dénominateur ne s'annule pas sur F.

VI-5b Soit $\sigma\in[1,2]$ et $t\in\mathbf{R}$. On suppose d'abord que $|t|\geqslant 1$. Dans ce cas $\sigma+it\neq 1$ et

$$h(\sigma+it)=\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}+\frac{1}{\sigma-1+it}=-\Phi(\sigma+it)+\frac{1}{\sigma-1+it},$$

par la question **V-1e)**. La question **V-6)** entraîne alors les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}|h(\sigma+it)| &\leqslant |\Phi(\sigma+it)|+\frac{1}{|\sigma-1+it|} && (4.43)\\ &\leqslant 4M|t|^{13/2}+\frac{1}{|t|} && (4.44)\\ &\leqslant 4M|t|^{13/2}+1\leqslant(4M+1)|t|^{13/2}\end{aligned}$$

Soit $t\in[-1,1]$. Comme montré à la question précédente h se prolonge continûment à $[1,2]\times[-1,1]$ qui est compact et donc (en notant toujours h ce prolongement) $C=\max_{s\in[1,2]\times[-1,1]}|h(s)|$ est une quantité finie.

On pose alors $K_1 = \max(C, (4M+1))$ et on a pour tout $\sigma \in [1,2]$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$|h(\sigma+it)| \leqslant C\mathbf{1}_{[-1,1]}(t) + (4M+1)|t|^{13/2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|t|) \leqslant K_1(1+|t|^{13/2}),$$

qui est l'inégalité voulue.

VI-5c Soit $(\sigma,t) \in [1,2]\times\mathbf{R}$. Par la question **III-1g)** appliquée à $\sigma_0 = 2$ et $k = 8$, on a $|\Gamma(\sigma+it)| \leqslant 2^4 M_{8,2}(1+|t|)^{-8}$. Combiné à l'inégalité de la question précédente on a

$$\begin{aligned}|\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)| &\leqslant 2^4 M_{8,2}K_1(1+|t|^{13/2})(1+|t|)^{-8} \\ &\leqslant 2^4 M_{8,2}K_1(1+|t|)^{13/2}(1+|t|)^{-8} = 2^4 M_{8,2}K_1(1+|t|)^{-3/2},\end{aligned} \tag{4.45}$$

qui est l'inégalité voulue avec $K_2 = 2^4 M_{8,2}K_1$. On en déduit pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $\sigma \in [1,2]$, que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-\sigma-1-it}| \leqslant x^{-1-\sigma}K_2(1+|t|)^{-3/2}.$$

Comme $t \mapsto (1+|t|)^{-3/2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, c'est aussi le cas de $t \in \mathbf{R} \mapsto \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}$ puisque cette dernière fonction est également continue, et ceci est le résultat voulu.

VI-5d Les questions précédentes, plus précisément

• la question précédente pour le membre de gauche

• la question **III-2e)** pour la première intégrale du membre de droite, et la question **VI-3)** pour la dernière

montrent que les intégrales suivantes sont absolument convergentes et donnent les égalités

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(\sigma+it)}{\sigma-1+it}x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t && (4.46)\\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t && (4.47)\\ &= \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}x^{-(\sigma+it)}\mathrm{d}t && (4.48)\\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-nx} = I(x),\end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

VI-5e On fixe $x \in \mathbf{R}^*$ et pour tous $(\sigma,t)\in[1,2]\times\mathbf{R}$, on pose $g_\sigma(t) = \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}$.

La question **VI-5a)** montre que $\lim_{\sigma\to 1^+} g_\sigma(t) = g_1(t)$, pour tout $t \in \mathbf{R}$.

La question **VI-5c)** montre ensuite que pour tout $(\sigma,t) \in [1,2]\times\mathbf{R}$, on a $|g_\sigma(t)| \leqslant f(t)$ où $f(t) = K_2(1+|t|)^{-3/2}$. Comme f est intégrable sur $\mathbf{R}$, le théorème de convergence dominée implique que $\lim_{\sigma\to 1^+}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\mathrm{d}t$. Or la question précédente montre que pour tout $\sigma \in]1,2]$, on a $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(t)\mathrm{d}t$. Donc $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t)\mathrm{d}t$. On a donc

$$xI(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(1+it)h(1+it)x^{-it}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(1+it)h(1+it)e^{-it\log x}\mathrm{d}t,$$

qui est l'égalité voulue.

VI-6 Le théorème de Riemann-Lebesgue implique que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(1+it)h(1+it)e^{it\lambda}\mathrm{d}t = 0$$

par intégrabilité sur $\mathbf{R}$ (démontrée en **VI-5c)**) de la fonction $t \mapsto \Gamma(1+it)h(1+it)$.
Appliqué à $\lambda = -\log x$ lorsque $x \to 0^+$, il entraîne le résultat voulu grâce à la question précédente.

VI-7 La question précédente implique que $\lim_{x\to 0^+} x\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-nx} = 1$. On utilise ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6$) avec $a_n = \Lambda(n)$, $\lambda_n = n$, $n \geqslant 1$. On a alors $D(\sigma) = \sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-nx}$ et donc pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on a

$$p\frac{D(p\sigma)}{D(\sigma)} = \frac{(p\sigma)\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-n(p\sigma)}}{\sigma\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)e^{-n\sigma}} \xrightarrow[\sigma\to 0^+]{} 1$$

et donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfont l'hypothèse (H_1) de ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6$) qui permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} D(1/n)^{-1}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Lambda(n) = 1/\Gamma(2) = 1\ .$$

Or on a montré que $\frac{1}{n}D(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k\geqslant 1}\Lambda(k)e^{-k/n}$ tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. Cela prouve bien ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_2$). La question **I-4d)** entraîne alors ($\boldsymbol{\mathcal{E}q}_1$)