Chapitre 3

Épreuves d'admissibilité

3.1 Énoncés

Les sujets des deux épreuves écrites sont disponibles à l'URL https://www.devenirenseignant.gouv.fr/les-sujets-des-epreuves-d-admissibilite-et-les-rapports-des-jurys-des-concours-de-l-agregation-de-3 ou sur le site https://agreg.org.

3.2 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

3.2.1 Présentation du sujet

Le problème était centré sur l'algèbre linéaire, avec le thème des endomorphismes nilpotents pour fil conducteur. Les deux premiers exercices le complétaient en abordant brièvement la théorie des groupes et l'arithmétique. Les quelques paragraphes suivants proposent un survol du problème.

Notons $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. La réduction de Jordan classifie les orbites du groupe général linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ agissant par conjugaison sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$. Bien connue d'un grand nombre de candidates et candidats, elle est présentée dans la partie III.

Une autre situation favorable consiste à regarder l'action du groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M^{-1}\}$ sur l'ensemble $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ des matrices nilpotentes symétriques. Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est ici banal : les matrices symétriques réelles étant diagonalisables, l'ensemble $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ est réduit à la matrice nulle. Mais les choses deviennent intéressantes lorsque $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: il existe alors une bijection naturelle entre l'ensemble des orbites de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ agissant sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des orbites de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ agissant sur $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$. Ce résultat classique – il apparaît dans le livre *The Theory of Matrices* de F. R. Gantmacher (Chelsea, New York, 1959) – est présenté dans la partie IV.

Il peut également paraître légitime d'étudier l'action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ tout entier. Cette question s'avère difficile, mais est abordable lorsqu'on se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et qu'on se restreint aux endomorphismes nilpotents d'indice au plus 2 et de rang r fixé. Elle se ramène en effet (voir la partie II du problème) à l'étude de l'action du groupe $\mathbf{O}_r(\mathbb{R}) \times \mathbf{O}_{n-r}(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche et à droite sur l'ensemble $\mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $r \times (n-r)$ à coefficients réels, pour laquelle les orbites sont classifiées par la décomposition en valeurs singulières. Bien que cette dernière soit au programme du concours, il nous a paru souhaitable d'en rappeler l'énoncé et une démonstration dans la partie I. Soulignons ici la très grande utilité de la décomposition en valeurs singulières dans les applications des mathématiques, notamment grâce à l'existence d'algorithmes de calcul performants, et notons à nouveau l'influence de Camille Jordan, qui en fut l'un des inventeurs à la fin du XIXe siècle.

La partie V, sensiblement plus difficile que les parties I à IV, aborde un problème bien différent : compter les sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent, le corps $\mathbb{K}$ étant supposé fini. Plus précisément, on se donne trois partitions λ, μ et ν, et on démontre l'existence d'un polynôme $G^{\lambda}_{\mu,\nu}(X)$ ayant la propriété suivante : si $\mathbb{K}$ est un corps fini, si u est un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et si le type de Jordan de u est λ, alors $G^{\lambda}_{\mu,\nu}(|\mathbb{K}|)$ est le nombre de sous-espaces vectoriels F de E, stables par u, tels que les endomorphismes (nécessairement nilpotents) induits par u sur F et E/F aient pour type de Jordan μ et ν, respectivement. Ces polynômes $G^{\lambda}_{\mu,\nu}(X)$ sont appelés polynômes de Hall et jouent un rôle important dans la construction par J. A. Green de la table des caractères des groupes $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. La preuve présentée est due à A. V. Zelevinsky et se trouve dans le livre *Symmetric Functions and Hall Polynomials* de I. G. Macdonald (Oxford University Press, Oxford, 1995). Notons que la majoration du degré de $G^{\lambda}_{\mu,\nu}(X)$ donnée dans la question 30 est en fait une égalité et que le coefficient dominant de ce polynôme est connu.

3.2.2 Commentaires du jury

Du côté positif, le jury salue les efforts des candidates et candidats. Les notations utilisées sont généralement proprement introduites avant d'être utilisées et les objets sont souvent quantifiés. Les candidates et candidats qui s'affranchissent de cette contrainte sont rapidement découverts. De même, la plupart des candidates et candidats utilisent les symboles logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ avec parcimonie et à bon escient, et pas comme substitut au mot « donc ».

Du côté négatif, le jury observe qu'un grand nombre de candidates et candidats ne maîtrisent pas des concepts et résultats élémentaires. Un diagnostic détaillé est proposé ci-après. Par ailleurs, beaucoup d'erreurs auraient pu être évitées si leurs auteurs s'étaient assurés de la qualité de leur réponse plutôt que se précipiter vers la question suivante : le peu de temps gagné est parfois chèrement payé.

Exercice 1

Plus de la moitié des candidates et candidats n'ont pas su apporter d'élément de réponse correct à la question 1 de cet exercice. La définition de l'ordre d'un élément est connue de la plupart des candidates et candidats, mais l'usage concret de cette notion n'est pas maîtrisé : il était par exemple fréquent de lire dans les copies qu'un groupe cyclique d'ordre n contient un unique élément d'ordre n. De nombreux candidates et candidats ont préféré utiliser une notation multiplicative, alors que l'énoncé précisait qu'on regardait le groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Ces candidates et candidats se retrouvèrent rapidement dans une situation confuse : notant x un générateur, ils ne savaient plus bien s'ils devaient examiner x^k modulo n ou k modulo n. Signalons enfin qu'il n'est pas vrai que si d divise n, alors le groupe $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: dans cette situation, seul est naturel l'homomorphisme (surjectif) d'anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ déduit de l'inclusion $n\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$.

Dans la question 2 a), la majorité des candidates et candidats n'ont pas vu le cas particulier $q = 1$, y compris ceux qui ont écrit correctement la congruence à tester $2q - 1 \equiv 1 \pmod{4q}$.

La question 2 b) n'a généralement pas été réussie : seules 40% des copies l'abordant obtiennent la moitié ou plus des points que le barème lui attribuait.

Exercice 2

Un quart des candidates et candidats n'ont eu aucun point sur la première question, soit qu'ils n'ont pas essayé de la traiter, soit que leur réponse était fausse ou donnée sans justification. Plusieurs candidates et candidats ont trouvé un ensemble infini de solutions, d'autres ont avancé l'argument que x^2 et y^2 sont positifs quand x et y appartiennent à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Le jury a par ailleurs constaté la présence d'erreurs de calcul ou de raisonnement dans la majorité des copies ayant abordé la question 3.

Exercice 3

Les candidates et candidats ont suivi deux stratégies pour la question 1 : une approche en coordonnées ou l'utilisation du théorème de Riesz. Dans le premier cas, le correcteur vérifiait le calcul, notamment en regardant si le candidat avait choisi d'utiliser des bases orthonormées de E et F. Dans le second, le correcteur contrôlait la place du quantificateur sur x dans la rédaction. Une erreur souvent relevée dans les copies les plus fragiles était de croire que le z cherché devait être l'antécédent de y par u.

La question 2 a été souvent correctement traitée. Une maladresse fréquemment observée dans les copies était de redémontrer l'unicité de u^* sans voir qu'elle découlait de la question 1. A contrario, concernant la linéarité, une fois établie l'égalité $(u^*(y_1+y_2),x)_E = (u^*(y_1)+u^*(y_2),x)_E$ pour tout $x \in E$ et tout $(y_1,y_2) \in F^2$, il était maladroit d'invoquer l'unicité de *l'application* u^* pour conclure à l'égalité $u^*(y_1+y_2) = u^*(y_1)+u^*(y_2)$.

Problème

Dans l'ensemble, les trois premières questions du problème ont été réussies par les candidates et candidats.

Dans la question 1, l'inclusion $\ker u \subset \ker(u^* \circ u)$ a posé davantage de difficultés que la réciproque : partant d'un vecteur $x \in \ker u$, certains candidates ou candidats ont écrit $((u^* \circ u)(x),x)_E = (u(x),u(x))_F = 0$, et en ont déduit l'égalité $(u^* \circ u)(x) = 0$ en invoquant la non-dégénérescence du produit scalaire. Cet argument n'est pas correct.

Dans la question 2, plusieurs candidates ou candidats ont écrit « *le* vecteur propre de $u^* \circ u$ pour la valeur propre λ », oubliant qu'il n'y a pas unicité. Par ailleurs, beaucoup de candidates ou candidats se sont contentés d'écrire les inégalités $\lambda(x,x)_E = (u(x),u(x))_F \geqslant 0$ et $(x,x)_E \geqslant 0$ pour justifier la positivité de λ, sans préciser qu'en fait $(x,x)_E$ est *strictement* positif. Sur une question aussi facile, le jury distingue les candidats par la précision de leur rédaction.

Les questions 4 à 6 ont permis aux candidates et candidats soigneux de mettre en valeur leurs qualités.

La principale difficulté de la question 4 était de justifier l'égalité des dimensions de E_λ et F_λ. Elle a donné lieu à un nombre élevé d'erreurs sérieuses. Ainsi certains candidats ont affirmé que la seule existence de l'application linéaire $u_\lambda : E_\lambda \to F_\lambda$ suffisait à garantir l'inégalité $\dim E_\lambda \leqslant \dim F_\lambda$. D'autres ont commencé par observer que u_λ était injective, puis ont écrit qu'« injectif implique bijectif en dimension finie », et ont alors cru licite d'affirmer que u_λ était un isomorphisme pour conclure à l'égalité des dimensions.

Il n'était pas possible de proposer une réponse viable à la question 5 sans utiliser le théorème spectral. Pour autant, les candidates et candidats ayant pensé à celui-ci n'ont pas toujours produit un raisonnement pleinement satisfaisant : partant d'une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que

$$(u^* \circ u)(e_i) = \begin{cases} \lambda_i e_i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0 & \text{si } r+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

et posant $f_i = u(e_i)/\sqrt{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1,r]\!]$, on peut compléter $(f_1,\dots,f_r)$ en une base de F, qu'on orthonormalise ensuite à l'aide du procédé de Gram–Schmidt. Cependant appliquer le procédé de Gram–Schmidt modifie potentiellement les vecteurs f_1, ..., f_r, et la relation $u(e_i) = \sqrt{\lambda_i} f_i$ n'est alors plus assurée. Certains candidates ou candidats n'ont pas vu la difficulté. D'autres ont cherché à justifier que la famille $(f_1,\dots,f_r)$ était orthonormale – et restait donc inchangée par le procédé de Gram–Schmidt – en invoquant seulement le caractère isométrique de $u_\lambda/\sqrt{\lambda}$, oubliant qu'on a ici affaire non pas à une isométrie, mais à plusieurs (une par valeur propre), assemblées d'une façon bien spécifique. En fin de compte, seuls 15% des candidates et candidats ont eu la moitié ou plus des points que le barème attribuait à cette question.

La question 6 a) a été semblablement mal réussie. Il ne s'agissait pourtant que de passer du cadre vectoriel au cadre matriciel. Beaucoup de candidates ou candidats ont annoncé considérer « l'endomorphisme $u : E \to F$ canoniquement associé à la matrice M » sans préciser leurs notations : des espaces euclidiens E et F étaient bien définis dans l'énoncé, mais pour les utiliser il était nécessaire de les munir de bases orthonormées (rappelons qu'un espace vectoriel abstrait n'a pas de base canonique). Par ailleurs, peu ont pensé à justifier que le rang r de M coïncidait avec le nombre r introduit dans la question 5.

Les réponses descandidates et candidats à la question 7 étaient souvent insuffisamment justifiées. Par exemple, on pouvait utiliser un procédé d'orthonormalisation pour produire la base désirée, mais il fallait alors donner un argument expliquant pourquoi la construction proposée fonctionnait. On pouvait à cet endroit citer sans preuve le fait que si le procédé de Gram–Schmidt produit la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ à partir de la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$, alors pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, les sous-espaces vectoriels engendrés par les deux familles $(e_1, \ldots, e_i)$ et $(e'_1, \ldots, e'_i)$ sont égaux.

Les questions 9 et 10 ont été peu et mal traitées. Ainsi seule une petite moitié des candidates et candidats ont abordé la question 9 a), et seulement 40% parmi eux ont eu la moitié ou plus des points que le barème attribuait à cette question.

À l'opposé, les trois quarts des candidates et candidats ont abordé la question 11, souvent avec succès. Rappelons qu'au niveau de l'agrégation, une récurrence est préférable à l'usage de points de suspension. Signalons également une erreur relevée dans un nombre significatif de copies : étant donnés un corps $\mathbb{K}$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, un scalaire λ et un vecteur x de E, l'implication $\lambda x = 0 \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0)$ n'est pas conséquence de l'intégrité de $\mathbb{K}$.

Dans la question 12 a) apparaissait la notion de somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels. La majorité des candidats ne la maîtrisent pas : près de 80% des candidates et candidats ayant abordé cette question ne peuvent écrire de façon correcte l'objectif de leur démonstration, et essaient de bricoler avec les intersections deux à deux des sous-espaces ou d'introduire des scalaires. Cependant l'associativité de la somme directe est connue et utilisée avec conviction dans les questions suivantes.

Une minorité de candidates et candidats ont abordé la partie IV du problème. Les tout meilleurs en sont venus à bout et ont pu effleurer la partie V.

3.2.3 Éléments de solution

Exercice 1

1. Soit n un entier strictement positif. Notons $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'homomorphisme quotient. La correspondance $H \mapsto g^{-1}(H)$ établit une bijection de l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ contenant $n\mathbb{Z}$, la bijection réciproque étant $K \mapsto g(K)$.

Un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme $m\mathbb{Z}$ avec $m \geqslant 0$. Or $m\mathbb{Z}$ contient $n\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n. L'application $m \mapsto g(m\mathbb{Z})$ est donc une bijection de l'ensemble des diviseurs positifs de n sur l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Avec ces notations, on observe maintenant que le sous-groupe $g(m\mathbb{Z})$ est d'ordre $d = n/m$. En effet, $g(m\mathbb{Z})$ est l'image de l'homomorphisme de groupes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ défini par $f(x) = g(mx)$ pour $x \in \mathbb{Z}$. Comme le noyau de f est

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid mx \text{ est multiple de } n\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est multiple de } d\} = d\mathbb{Z},$$

l'image de f est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et donc est d'ordre d.

En rassemblant les éléments précédents : si d est un diviseur positif de n, alors $g(m\mathbb{Z})$ avec $m = n/d$ est l'unique sous-groupe d'ordre d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Soit q un entier naturel impair.

a) Un calcul direct montre que

$$(2q-1)^2 \equiv (2q+1)^2 \equiv 1 \pmod{4q}.$$

Par conséquent les classes modulo $4q$ de $2q-1$ et $2q+1$ appartiennent bien au groupe G des éléments inversibles de cet anneau, et leur ordre dans G divise 2. Comme $q \geqslant 1$, nous avons $1 < 2q+1 < 4q$ dans $\mathbb{Z}$, donc $2q+1 \not\equiv 1 \pmod{4q}$: la classe modulo $4q$ de $2q+1$ ne peut pas être d'ordre 1 dans G, donc est d'ordre 2 dans G.

Il en est de même pour la classe modulo $4q$ de $2q-1$, sauf dans un cas : si $q=1$, alors cette classe est l'élément neutre de G donc est d'ordre 1.

b) Si $q=1$, alors $G=(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ contient deux éléments (les classes modulo 4 de 1 et 3), donc est cyclique.

Si $q>1$, alors les classes de $2q-1$ et $2q+1$ sont deux éléments distincts d'ordre 2 de G. Ainsi G contient au moins deux sous-groupes d'ordre 2 et n'est donc pas cyclique d'après la question 1.

Exercice 2

1. Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a $\overline{0}^2=\overline{0}$ et $\overline{1}^2=\overline{2}^2=\overline{1}$. Or dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la somme de deux éléments appartenant à $\{\overline{0},\overline{1}\}$ n'est nulle que si ces éléments sont tous les deux nuls. Par conséquent, pour $(x,y)\in(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, l'équation $x^2+y^2=0$ n'est satisfaite que si $x^2=y^2=\overline{0}$, c'est-à-dire $x=y=\overline{0}$. Réciproquement, $x=y=\overline{0}$ fournit une solution de l'équation.

Conclusion : l'ensemble des couples $(x,y)\in(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ tels que $x^2+y^2=0$ est le singleton $\{(\overline{0},\overline{0})\}$.

2. Supposons que $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ vérifie $x^2-5y^2=33$. Les classes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de x et y dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vérifient alors $\overline{x}^2-5\overline{y}^2=\overline{33}$, c'est-à-dire $\overline{x}^2+\overline{y}^2=0$. D'après la question a), on a donc nécessairement $\overline{x}=\overline{y}=\overline{0}$, donc x et y sont tous deux multiples de 3, donc x^2 et y^2 sont tous deux multiples de 9, ce qui est incompatible avec l'équation $x^2-5y^2=33$.

Conclusion : l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $x^2-5y^2=33$ est l'ensemble vide.

3. Nous allons démontrer que l'équation $x^2-5y^2=33$ n'a pas de solution rationnelle.

Raisonnant par l'absurde, nous supposons l'existence d'un couple $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$ solution de cette équation. Réduisant x et y au même dénominateur, nous écrivons $x=a/c$ et $y=b/c$, avec a, b, c entiers et $c>0$. Quitte à diviser ces trois entiers par leur PGCD, nous pouvons les supposer premiers entre eux dans leur ensemble.

L'équation s'écrit maintenant $a^2-5b^2=33c^2$. Le même argument que dans la question b) démontre que a et b sont tous deux multiples de 3. Il s'ensuit que $33c^2$ est multiple de 9, donc que 3 divise $11c^2$, et donc (par le lemme d'Euclide) que 3 divise c. Ainsi a, b et c sont tous les trois multiples de 3. Il ne sont donc pas premiers entre eux dans leur ensemble, ce qui contredit les choix effectués durant la construction.

Conclusion : l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$ tels que $x^2-5y^2=33$ est l'ensemble vide.

Exercice 3

1. Pour chaque $v\in E$, l'application

$$E\to\mathbb{R},\quad x\mapsto(v,x)_E$$

est une forme linéaire sur E, qu'on note $(v,.)_E$. L'application $v\mapsto(v,.)_E$ est alors un isomorphisme de l'espace vectoriel E sur son dual E^* (théorème de Riesz en dimension finie).

Prenons $y \in F$. L'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (y, u(x))_F$ est la composée de l'application linéaire $u : E \to F$ et de la forme linéaire $(y, .)_F : F \to \mathbb{R}$, donc est une forme linéaire sur E. Soit z l'antécédent de cette forme linéaire par l'isomorphisme de l'alinéa précédent. Par construction, z est l'unique élement de E tel que

$$(z, x)_E = (y, u(x))_F$$

pour tout $x \in E$.

2. Avec les notations de la question 1, u^* doit être définie comme étant l'application $y \mapsto z$, pour chaque élément $y \in F$. La clause d'unicité dans la question 1 garantit à la fois la légitimité de cette définition et l'unicité de u^*.

Il nous reste à justifier la linéarité de cette application u^*. Soit $(y, y') \in F^2$ et soit $x \in E$. En sommant membre à membre les trois égalités

$$(u^*(y), x)_E = (y, u(x))_F, \quad (u^*(y'), x)_E = (y', u(x))_F$$

et

$$-(u^*(y + y'), x)_E = -(y + y', u(x))_F$$

et en utilisant la bilinéarité des produits scalaires, nous obtenons

$$(u^*(y) + u^*(y') - u^*(y + y'), x)_E = (y + y' - (y + y'), u(x))_F = (0, u(x))_F = 0.$$

Cette égalité est valable pour tout $x \in E$. L'injectivité de l'application $v \mapsto (v, .)_E$ garantit alors que $u^*(y + y') = u^*(y) + u^*(y')$, égalité qui vaut pour tout $(y, y') \in F^2$. Un raisonnement similaire établit l'égalité $u^*(\lambda y) = \lambda u^*(y)$ pour tout $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times F$.

Problème

1. La linéarité de u^* (exercice 3) entraîne l'égalité $u^*(0) = 0$. Par suite, si un vecteur $x \in E$ satisfait $u(x) = 0$, alors

$$(u^* \circ u)(x) = u^*(u(x)) = u^*(0) = 0.$$

Réciproquement, si $x \in E$ vérifie $(u^* \circ u)(x) = 0$, alors

$$(u(x), u(x))_F = ((u^* \circ u)(x), x)_E = 0,$$

ce qui implique $u(x) = 0$ puisque le produit scalaire $(\, , \,)_F$ est défini positif.

Les deux conditions $x \in \ker u$ et $x \in \ker(u^* \circ u)$ sont donc équivalentes, autrement dit $\ker u = \ker(u^* \circ u)$.

2. Soit λ une valeur propre de $u^* \circ u$. Il existe alors un vecteur non nul x dans E tel que $(u^* \circ u)(x) = \lambda x$, et il vient

$$\lambda(x, x)_E = (\lambda x, x)_E = ((u^* \circ u)(x), x)_E = (u(x), u(x))_F \geqslant 0.$$

Comme $(x, x)_E > 0$, nous obtenons $\lambda \geqslant 0$.

La preuve pour $u \circ u^*$ est analogue : si μ est une valeur propre de $u \circ u^*$, alors il existe un vecteur non nul y dans F tel que $(u \circ u^*)(y) = \mu y$. Des inégalités

$$\mu(y, y)_F = (y, \mu y)_F = (y, (u \circ u^*)(y))_F = (u^*(y), u^*(y))_E \geqslant 0$$

et $(y, y)_F > 0$, nous déduisons $\mu \geqslant 0$.

3. Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire $(u^* \circ u)(x) = \lambda x$. Alors

$$(u \circ u^*)(u(x)) = u(u^*(u(x))) = u((u^* \circ u)(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

(en utilisant la définition de E_λ et la linéarité de u), et ainsi $u(x) \in F_\lambda$.

Ceci prouve l'inclusion $u(E_\lambda) \subset F_\lambda$. La vérification de $u^*(F_\lambda) \subset E_\lambda$ est analogue.

4. Dorénavant, nous indiquons le produit scalaire simplement par $(\ ,\ )$, sans préciser l'espace euclidien auquel il se rapporte. Comme de coutume, nous notons $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ la norme d'un vecteur x.

Si $x \in E_\lambda$, alors $\|u(x)\|^2 = \lambda\|x\|^2$ d'après le calcul de la question 2. Comme $\lambda > 0$, nous pouvons considérer l'application linéaire $u_\lambda/\sqrt{\lambda} : E_\lambda \to F_\lambda$. Elle préserve les distances, puisque pour tout couple (y,z) d'éléments de E_λ,

$$\left\| \frac{u_\lambda}{\sqrt{\lambda}}(y) - \frac{u_\lambda}{\sqrt{\lambda}}(z) \right\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|u(y) - u(z)\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|u(y-z)\| = \|y-z\|.$$

La question 3 permet de considérer l'application linéaire $u_\lambda^* : F_\lambda \to E_\lambda$ obtenue en restreignant u^* à la source et au but. (On peut vérifier que u_λ^* est l'application linéaire adjointe de u_λ : la notation u_λ^* n'est donc pas ambiguë.) Des égalités $u_\lambda^* \circ u_\lambda = \lambda\,\mathrm{id}_{E_\lambda}$ et $u_\lambda \circ u_\lambda^* = \lambda\,\mathrm{id}_{F_\lambda}$, réécrites sous la forme

$$(u_\lambda^*/\sqrt{\lambda}) \circ (u_\lambda/\sqrt{\lambda}) = \mathrm{id}_{E_\lambda} \quad \text{et} \quad (u_\lambda/\sqrt{\lambda}) \circ (u_\lambda^*/\sqrt{\lambda}) = \mathrm{id}_{F_\lambda},$$

on déduit que $u_\lambda/\sqrt{\lambda}$ est bijective, de réciproque $u_\lambda^*/\sqrt{\lambda}$. Les deux espaces vectoriels E_λ et F_λ sont donc isomorphes, et en particulier ont même dimension.

En conclusion, l'application $u_\lambda/\sqrt{\lambda}$ est une bijection de E_λ sur F_λ qui préserve les distances, c'est-à-dire une isométrie.

5. L'endomorphisme $u^* \circ u$ étant autoadjoint, il peut être diagonalisé dans une base orthonormée. Dit autrement, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de $u^* \circ u$. Quitte à renuméroter ces vecteurs, on peut supposer que les $n-r$ derniers sont propres pour la valeur propre zéro, et que pour $i \in [\![1,r]\!]$, le vecteur e_i est propre pour la valeur propre λ_i.

Pour $i \in [\![1,r]\!]$, définissons $f_i = u(e_i)/\sqrt{\lambda_i}$. Alors, pour i et j dans $[\![1,r]\!]$, on a

$$(f_i, f_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}(u(e_i), u(e_j)) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}((u^* \circ u)(e_i), e_j) = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}}(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $(f_1, \ldots, f_r)$ est une famille orthonormée de vecteurs de F. Soit G le sous-espace vectoriel qu'elle engendre (c'est l'image de u, mais nous n'avons pas besoin de le savoir), et soit $(f_{r+1}, \ldots, f_m)$ une base orthonormée de l'orthogonal de G. Alors $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base orthonormée de F.

Par ailleurs, si $i \in [\![r+1,n]\!]$, alors e_i appartient à $\ker(u^* \circ u)$, et donc $u(e_i) = 0$ d'après la question 1. On constate alors que, par construction, les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ de F satisfont à la propriété demandée.

Autre solution : on peut appliquer le théorème spectral aux endomorphismes auto-adjoints $u^* \circ u$ de E et $u \circ u^*$ de F pour obtenir les décompositions en sommes directes orthogonales

$$E = E_{\mu_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\mu_p} \overset{\perp}{\oplus} E_0 \quad \text{et} \quad F = F_{\mu_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_{\mu_p} \overset{\perp}{\oplus} F_0,$$

où μ_1, ..., μ_p sont les valeurs propres non nulles de ces endomorphismes (ce sont les mêmes d'après la question 4). On peut alors choisir une base orthonormée de chaque espace E_{μ_j} et la transporter dans F_{μ_j} par l'isométrie $u_{\mu_j}/\sqrt{\mu_j}$, puis compléter cette donnée par celle de bases orthonormées de E_0 et F_0. On obtient alors par concaténation des bases orthonormées de E et F. Comme $E_0 = \ker u$ (question 1), ces bases satisfont aux conditions requises, quitte à effectuer une permutation pour les adapter à l'énumération λ_1, ..., λ_r choisie.

6.

a) Soient E et F deux espaces euclidiens de dimension n et m, respectivement, munis de bases orthonormées $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\eta_1, \dots, \eta_m)$. Soit $u : E \to F$ l'application linéaire ayant M pour matrice dans ces bases ; elle est de même rang que M, à savoir r.

Soient λ_1, ..., λ_s les valeurs propres strictement positives de $u^* \circ u$, répétées selon leurs multiplicités, et rangées en ordre décroissant. La question 5 établit l'existence de bases orthonormées $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$ de E et F, respectivement, telles que

$$u(e_i) = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i}\, f_i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant s, \\ 0 & \text{si } s+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

L'image de u est le sous-espace vectoriel engendré par la famille libre $(f_1, \dots, f_s)$; ainsi u est de rang s, et donc $r = s$. On définit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. La matrice D de l'énoncé est alors la matrice de u dans les bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_m)$.

Soit P la matrice carrée d'ordre m dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs f_i dans la base $(\eta_1, \dots, \eta_m)$. Alors les vecteurs colonnes de P sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 dans $\mathbb{R}^m$, muni de sa structure euclidienne habituelle ; autrement dit $P \in \mathbf{O}_m(\mathbb{R})$. De même, soit Q la matrice carrée d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs ε_i dans la base $(e_1, \dots, e_n)$; alors $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

La relation $M = PDQ$ demandée par l'énoncé n'est autre que la formule reliant les matrices d'une application linéaire lors d'un changement de base.

b) On se place à présent dans le cas particulier $m = n = r$. Alors D est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs. Il s'ensuit que $Q^{-1}DQ$ est une matrice symétrique (puisque ${}^tQ = Q^{-1}$) définie positive (puisque ses valeurs propres sont toutes strictement positives). Par conséquent, la factorisation $M = (PQ)(Q^{-1}DQ)$ est la décomposition polaire de M. L'unicité de la décomposition polaire garantit ainsi que le produit PQ ne dépend que de M, et pas de la factorisation $M = PDQ$ utilisée.

7. Muni de la restriction du produit scalaire de E, $\operatorname{im} u$ est un espace euclidien de dimension r, et admet donc une base orthonormée $(e_1, \dots, e_r)$. Choisissons de même une base orthonormée $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de l'orthogonal de $\operatorname{im} u$ dans E. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E qui satisfait à la condition de l'énoncé.

8. L'égalité $u^2 = 0$ implique l'inclusion $\operatorname{im} u \subset \ker u$. En utilisant le théorème du rang, on obtient

$$r = \dim \operatorname{im} u \leqslant \dim \ker u = \dim E - \dim \operatorname{im} u = n - r,$$

d'où $2r \leqslant n$.

9.

a) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Soit $u : E \to E$ l'endomorphisme de E ayant M pour matrice dans cette base ; il est de rang r. La question 7 nous donne une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_r)$ soit une base de $\operatorname{im} u$. Soit P la matrice d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs ε_1, ..., ε_n dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors $P \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ et la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est PMP^{-1}.

L'inclusion $\operatorname{im} u \subset \ker u$, établie dans la question 8, montre que $u(e_i) = 0$ pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, donc les r premières colonnes de PMP^{-1} sont nulles. De plus, comme l'image de u est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs e_1, ..., e_r, les $n - r$ dernières lignes de PMP^{-1} ne comportent que des zéros. Ainsi PMP^{-1} a la forme voulue

$$PMP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

b) L'endomorphisme u est de rang r, donc la matrice PMP^{-1} est de rang r, et la matrice B est également de rang r. Appliqué à la matrice B, le résultat de la question 6 a) fournit une suite décroissante $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ de réels strictement positifs et deux matrices orthogonales $R \in \mathbf{O}_r(\mathbb{R})$ et $S \in \mathbf{O}_{n-r}(\mathbb{R})$ telles que $B = RDS$, où $D = (d_{i,j})$ est la matrice à r lignes et $n-r$ colonnes donnée par

$$d_{i,j} = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } 1 \leqslant i = j \leqslant r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} PMP^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & RDS \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & D \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array}\right) K_{r,\sigma} \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right). \end{aligned}$$

Notant

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) P,$$

nous obtenons alors $QMQ^{-1} = K_{r,\sigma}$.

Il reste à justifier que Q est une matrice orthogonale. Comme R et S sont des matrices orthogonales, on peut écrire

$$^t\left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^tR^{-1} & 0 \\ \hline 0 & {}^tS \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right)^{-1}.$$

Ainsi $\left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right)$ est une matrice orthogonale. Par suite Q est bien orthogonale, car produit de deux matrices orthogonales.

10. La question 9 b) établit que chaque orbite de l'action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{E}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice $K_{r,\sigma}$. Il reste ainsi à démontrer que si deux matrices $K_{r,\sigma}$ et $K_{r',\sigma'}$ appartiennent à la même orbite, alors $(r, \sigma) = (r', \sigma')$.

On considère donc deux couples de paramètres (r, σ) et (r', σ') pour lesquels il existe une matrice $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $K_{r',\sigma'} = QK_{r,\sigma}Q^{-1}$. Les matrices $K_{r,\sigma}$ et $K_{r',\sigma'}$ sont alors semblables, a fortiori équivalentes, et ont donc même rang : ainsi $r = r'$. Le calcul

$$^tK_{r',\sigma'}K_{r',\sigma'} = {}^t\big(QK_{r,\sigma}Q^{-1}\big)\big(QK_{r,\sigma}Q^{-1}\big) = Q\,{}^tK_{r,\sigma}\,{}^tQQ\,K_{r,\sigma}\,Q^{-1} = Q\big({}^tK_{r,\sigma}K_{r,\sigma}\big)Q^{-1}$$

montre ensuite que les matrices $^tK_{r',\sigma'}K_{r',\sigma'}$ et $^tK_{r,\sigma}K_{r,\sigma}$ sont semblables. Ces deux matrices ont donc mêmes valeurs propres. Or l'énoncé observe qu'elles sont diagonales : à permutation près, leurs valeurs diagonales sont donc identiques, et ainsi (après suppression des zéros) les deux suites $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2)$ et $((\sigma'_1)^2, (\sigma'_2)^2, \dots, (\sigma'_r)^2)$ sont égales à permutation près. Comme σ et σ' sont, par convention, des suites décroissantes de réels positifs, on obtient $\sigma = \sigma'$. L'égalité $(r, \sigma) = (r', \sigma')$ que nous voulions établir a donc bien lieu.

11.

a) Comme $u^i(x) = 0$ dès que $i \geqslant h$, le sous-espace vectoriel $\langle x \rangle_u$ est engendré par la famille $(x, u(x), \dots, u^{h-1}(x))$.

Supposons que cette famille soit linéairement dépendante et considérons une relation de dépendance linéaire non banale

$$a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{h-1}u^{h-1}(x) = 0,$$

où a_0, a_1, ..., a_{h-1} sont des éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls. Soit $i \in [\![0, h-1]\!]$ le plus petit indice tel que $a_i \neq 0$. Appliquant u^{h-1-i} à la relation de dépendance linéaire, on obtient $a_i u^{h-1}(x) = 0$, et comme a_i est inversible dans $\mathbb{K}$, ceci entraîne $u^{h-1}(x) = 0$, ce qui est absurde.

Cette contradiction établit que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{h-1}(x))$ est linéairement indépendante. Comme elle engendre $\langle x \rangle_u$, c'est une base de cet espace.

b) Soit y un élément de $\langle x \rangle_u \cap \ker u$. Nous pouvons écrire y en coordonnées dans la base de la question a) :

$$y = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{h-1} u^{h-1}(x)$$

avec $(a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}) \in \mathbb{K}^h$. (On note ici que $h \geqslant 1$ puisque $x \neq 0$.) Utilisant la linéarité de u puis l'égalité $u^h(x) = 0$, on calcule alors

$$0 = u(y) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h-1} a_i u^{i+1}(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h-2} a_i u^{i+1}(x).$$

Puisque $(u(x), \ldots, u^{h-1}(x))$ est une famille libre, on obtient $a_0 = \cdots = a_{h-2} = 0$, puis $y = a_{h-1} u^{h-1}(x)$.

Ainsi $\langle x \rangle_u \cap \ker u$ est inclus dans la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $u^{h-1}(x)$. L'inclusion réciproque étant évidente, il y a égalité.

12.

a) Nous adoptons les notations de l'énoncé.

Commençons par prouver l'indication. Soit $i \in [\![1, m]\!]$ et soit $x \in \langle y_i \rangle_u$. Notant h la hauteur de y_i, nous pouvons exprimer x comme combinaison linéaire des vecteurs $u^k(y_i)$:

$$x = a_0 y_i + a_1 u(y_i) + \cdots + a_{h-1} u^{h-1}(y_i)$$

avec $(a_0, a_1, \ldots, a_{h-1}) \in \mathbb{K}^h$. Appliquant u, nous obtenons

$$u(x) = u\left(\sum_{j=0}^{h-1} a_j u^j(y_i)\right) = \sum_{j=0}^{h-1} a_j u^{j+1}(y_i) = \sum_{j=0}^{h-1} a_j u^j(z_i),$$

ce qui établit que $u(x) \in \langle z_i \rangle_u$. Nous avons donc bien $u(\langle y_i \rangle_u) \subset \langle z_i \rangle_u$.

Revenant à la question posée, considérons un m-uplet $(x_1, \ldots, x_m) \in \langle y_1 \rangle_u \times \cdots \times \langle y_m \rangle_u$ tel que $x_1 + \cdots + x_m = 0$. Nous devons prouver que tous les x_i sont nuls.

Pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, le vecteur $u(x_i)$ appartient à $\langle z_i \rangle_u$. De l'égalité $u(x_1) + \cdots + u(x_m) = 0$ et du fait que la somme $\langle z_1 \rangle_u + \cdots + \langle z_m \rangle_u$ est directe, nous déduisons que chaque $u(x_i)$ est nul. Ainsi $x_i \in \langle y_i \rangle_u \cap \ker u$.

Soit $h_i \geqslant 1$ la hauteur de z_i. Alors y_i est de hauteur $h_i + 1$; d'après la question 11 b), la droite $\langle y_i \rangle_u \cap \ker u$ est ainsi engendrée par le vecteur $u^{h_i}(y_i) = u^{h_i - 1}(z_i)$. Par suite, x_i est colinéaire à $u^{h_i-1}(z_i)$, et en particulier appartient à $\langle z_i \rangle_u$. Reprenant notre égalité $x_1 + \cdots + x_m = 0$ et notre somme directe $\langle z_1 \rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle z_m \rangle_u$, nous obtenons maintenant que chaque x_i est nul, ce qu'il fallait établir.

b) On observe que pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$ et chaque entier $j \geqslant 0$, le vecteur $u^j(z_i) = u(u^j(y_i))$ appartient au sous-espace vectoriel $u(\langle y_i \rangle_u)$. Ainsi $\langle z_i \rangle_u \subset u(\langle y_i \rangle_u) \subset u(F)$, et donc $\operatorname{im} u = \langle z_1 \rangle_u + \cdots + \langle z_m \rangle_u$ est inclus dans $u(F)$. L'inclusion réciproque est évidente, d'où l'égalité demandée.

c) Puisque $G \subset \ker u$, on a $F \cap G = F \cap (\ker u) \cap G = (F \cap \ker u) \cap G$, et cette intersection est réduite au vecteur nul de par la construction de G. La somme $F + G$ est donc directe.

Par ailleurs, pour tout $x \in E$, le vecteur $u(x)$ appartient à $\operatorname{im} u = u(F)$, donc il existe $w \in F$ tel que $u(x) = u(w)$. Certainement $x - w$ appartient à $\ker u$, donc s'écrit $x' + w'$ avec $x' \in G$ et $w' \in F \cap \ker u$. On a alors $x = (w + w') + x'$ avec $w + w' \in F$ et $x' \in G$. Tout élément de E appartient donc à $F + G$.

En conclusion, $E = F \oplus G$.

d) Choisissons une base $(x_{m+1}, \dots, x_\ell)$ de G. Comme $u(x_i) = 0$ pour chaque $i \in [\![m+1, \ell]\!]$, on a $G = \langle x_{m+1}\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$. Pour $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $x_i = y_i$. Utilisant les questions a) et c), on obtient alors

$$E = F \oplus G = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_m\rangle_u \oplus \langle x_{m+1}\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u,$$

comme désiré.

13. Soit (H_n) l'énoncé suivant : « Pour tout espace vectoriel E de dimension au plus n et tout endomorphisme nilpotent u de E, il existe une suite finie $(x_1, \dots, x_\ell)$ d'éléments non nuls de E telle que $E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$. »

L'énoncé (H_0) est vrai : il suffit de prendre $\ell = 0$.

Supposons que (H_n) est vrai et démontrons (H_{n+1}). Soit E un espace vectoriel de dimension au plus $n+1$, muni d'un endomorphisme nilpotent u. Si $\dim E = 0$, on prend $\ell = 0$. Sinon, on note que u ne peut pas être surjectif (sinon u^i serait surjectif pour tout $i \geqslant 0$, alors que u^i est nul pour i assez grand). L'image de u est donc un espace vectoriel de dimension au plus n, stable par u. On peut donc appliquer (H_n) à $\operatorname{im} u$ muni de la restriction de u : il existe une suite finie $(z_1, \dots, z_m)$ d'éléments non nuls de $\operatorname{im} u$ telle que $\operatorname{im} u = \langle z_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle z_m\rangle_u$. La construction étudiée dans la question 12 permet alors de construire une suite finie $(x_1, \dots, x_\ell)$ d'éléments non nuls de E telle que $E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$, ce qui établit la propriété voulue.

L'initialisation et l'hérédité sont ainsi prouvées, et donc l'énoncé (H_n) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14.

a) Notons ℓ la longueur de la partition λ.

Supposons que (E, u) est de type λ. Soit $(x_1, \dots, x_\ell)$ une suite d'éléments de E telle que chaque x_i est de longueur λ_i et $E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$. D'après la question 11 a), on peut munir chaque sous-espace $\langle x_i\rangle_u$ de la base $(x_i, u(x_i), \dots, u^{\lambda_i - 1}(x_i))$, et par construction la matrice dans cette base de la restriction de u à $\langle x_i\rangle_u$ est $\widetilde{J}_{\lambda_i}$. Ainsi

$$\big((x_1, u(x_1), \dots, u^{\lambda_1 - 1}(x_1), \dots, x_\ell, u(x_\ell), \dots, u^{\lambda_\ell - 1}(x_\ell)\big)$$

est une base de E et la matrice de u dans cette base est J_λ.

Réciproquement, partons d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle u a J_λ pour matrice. Pour $i \in [\![1, \ell]\!]$, on pose

$$x_i = e_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1}.$$

Alors pour tout $j \in [\![1, \lambda_i]\!]$, on a $u^{j-1}(x_i) = e_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + j}$ et $u^{\lambda_i}(x_i) = 0$. Ceci prouve que x_i est de hauteur λ_i et que $\langle x_i\rangle_u$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + 1}, \dots, e_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1} + \lambda_i})$. On en déduit que $E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$, puis que (E, u) est de type λ.

b) Soit $x \in E$ non nul, de hauteur $h \geqslant 1$. D'après la question 11 a), l'espace $\langle x\rangle_u$ admet pour base $(x, u(x), \dots, u^{h-1}(x))$.

Si $i \in [\![0, h]\!]$, alors le noyau de la restriction de u^i à $\langle x\rangle_u$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u^{h-i}(x)$, ..., $u^{h-1}(x)$: en effet ces vecteurs sont bien envoyés sur zéro par u^i, tandis que les autres vecteurs de la base sont envoyés sur $u^i(x)$, ..., $u^{h-1}(x)$, lesquels forment une famille libre. Le noyau de la restriction de u^i à $\langle x\rangle_u$ est donc de dimension i.

En revanche si $i > h$, alors le noyau de la restriction de u^i à $\langle x\rangle_u$ est $\langle x\rangle_u$ tout entier, donc est de dimension h. Regroupant les deux cas, nous trouvons que pour tout entier $i \geqslant 0$, le noyau de la restriction de u^i à $\langle x\rangle_u$ est de dimension $\min(h, i)$.

Soit λ une partition de longueur ℓ. Supposons que (E, u) soit de type λ et choisissons une décomposition

$$E = \langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u \qquad (*)$$

avec x_j de hauteur λ_j pour tout $j \in [\![1, \ell]\!]$. Alors pour chaque entier $i \geqslant 0$,

$$\ker u^i = \big(\ker u^i \cap \langle x_1 \rangle_u\big) \oplus \cdots \oplus \big(\ker u^i \cap \langle x_\ell \rangle_u\big).$$

En effet, étant donnée une famille $(y_1, \ldots, y_\ell) \in \langle x_1 \rangle_u \times \cdots \times \langle x_\ell \rangle_u$, la somme $y_1 + \cdots + y_\ell$ appartient au noyau de u^i si et seulement si $u^i(y_1) + \cdots + u^i(y_\ell) = 0$. Vu la somme directe $(*)$, ceci a lieu si et seulement si tous les termes $u^i(y_j)$ de la somme sont nuls, donc si et seulement si $(y_1, \ldots, y_\ell) \in \big(\ker u^i \cap \langle x_1 \rangle_u\big) \times \cdots \times \big(\ker u^i \cap \langle x_\ell \rangle_u\big)$.
Il vient ainsi

$$\dim(\ker u^i) = \sum_{j=1}^{\ell} \dim\big(\ker u^i \cap \langle x_j \rangle_u\big) = \sum_{j=1}^{\ell} \min(\lambda_j, i).$$

Pour $i \geqslant 1$, nous calculons alors

$$\dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1}) = \sum_{j=1}^{\ell} (\min(\lambda_j, i) - \min(\lambda_j, i-1)).$$

Dans la dernière somme, le terme $\min(\lambda_j, i) - \min(\lambda_j, i-1)$ vaut un si $i \leqslant \lambda_j$ et zéro sinon. Comme le nombre de parts de λ supérieures ou égales à i est égal à λ'_i, nous obtenons :

$$\dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1}) = \lambda'_i.$$

c) Si (E, u) est à la fois de type λ et de type μ, alors pour tout entier $i \geqslant 1$, on a $\lambda'_i = \dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1}) = \mu'_i$, et donc $\lambda' = \mu'$. Ceci entraîne que

$$\lambda = (\lambda')' = (\mu')' = \mu.$$

15.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base et soit u l'endomorphisme de E ayant M comme matrice dans cette base. D'après la question 13, il existe un entier naturel ℓ et une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ d'éléments de E telles que $E = \langle x_1 \rangle_u \oplus \langle x_2 \rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell \rangle_u$. Quitte à permuter les x_i, on peut supposer que la suite λ formée des hauteurs des x_i est décroissante. Alors λ est une partition de n et (E, u) est de type λ. D'après la question 14 a), il existe une base de E dans laquelle u admet J_λ pour matrice. Ainsi M et J_λ sont l'une et l'autre des matrices de u, dans deux bases différentes : M est donc semblable à J_λ.

Conservons ces notations et examinons l'unicité. Soit μ une partition de n telle que M soit semblable à J_μ. Alors il existe une base de E dans laquelle u admet J_μ pour matrice. La question 14 a) nous dit maintenant que (E, u) est de type μ, et la question 14 c) affirme ensuite que $\mu = \lambda$.

b) La partie II considérait un espace vectoriel E de dimension n muni d'un endomorphisme u de rang r tel $u^2 = 0$. Dans cette situation, on a $\dim \ker u^i = n$ pour $i \geqslant 2$ et $\dim \ker u = n - r$ (d'après le théorème du rang).

Soit λ le type de u. La question 14 b) donne alors pour la partition conjuguée de λ : $\lambda'_1 = n - r$, $\lambda'_2 = r$, et $\lambda'_i = 0$ pour $i \geqslant 3$. Calculant la conjuguée de la partition $\lambda' = (n - r, r)$, on obtient

$$\lambda = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{r}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-2r}).$$

Cette partition ne dépend que de r et pas de σ.

c) Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme nilpotent de E. Pour tout scalaire non nul a, l'endomorphisme au est nilpotent, et l'on a $\dim(\ker u^i) = \dim(\ker(au)^i)$ pour chaque entier $i \geqslant 1$. La question 14 b) montre alors que u et au ont même type.
Reprenant le raisonnement adopté dans la question a), on traduit ce résultat en termes de matrices de la façon suivante : deux matrices nilpotentes proportionnelles sont semblables à une même matrice J_λ, donc sont semblables.

16.

a) Soit ℓ la longueur de λ et soit P la matrice diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux $\widetilde{P}_{\lambda_1}$, $\widetilde{P}_{\lambda_2}$, ..., $\widetilde{P}_{\lambda_\ell}$. Cette matrice est symétrique puisque chacun des blocs diagonaux l'est. Les égalités $PJ_\lambda P^{-1} = {}^t(J_\lambda)$ et $P^2 = I_n$ s'obtiennent par un calcul par blocs à partir des formules $\widetilde{P}_d\widetilde{J}_d\big(\widetilde{P}_d\big)^{-1} = {}^t\big(\widetilde{J}_d\big)$ et $\big(\widetilde{P}_d\big)^2 = I_d$ données dans l'énoncé.

b) Soit i une racine carrée de -1 dans $\mathbb{K}$ (une telle racine existe puisque $\mathbb{K}$ est algébriquement clos) et soit a une racine carrée de $1/2i$ (la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2). Posons $b = ia$; alors $a^2 + b^2 = 0$ et $2ab = 1$. La matrice symétrique $Q = aI_n + bP$ vérifie ${}^tQQ = Q^2 = P$; en particulier Q est inversible puisque P l'est.
On peut alors calculer

$$ {}^t\big(QJ_\lambda Q^{-1}\big) = {}^tQ^{-1}\,{}^t(J_\lambda)\,{}^tQ = {}^tQ^{-1}\big(PJ_\lambda P^{-1}\big){}^tQ = \big({}^tQ^{-1}\,P\big)J_\lambda\big(P^{-1}\,{}^tQ\big) = QJ_\lambda Q^{-1}, $$

et ainsi la matrice $QJ_\lambda Q^{-1}$ est symétrique.

17.

a) Adoptons les notations de l'énoncé. Soit β_1, ..., β_m les éléments distincts présents dans la suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Soit γ_1, ..., γ_m des racines carrées de β_1, ..., β_m dans le corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. On peut alors considérer le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$ f(X) = \sum_{i=1}^{m} \left(\gamma_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \frac{X-\beta_j}{\beta_i-\beta_j} \right). $$

Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a $f(\beta_i) = \gamma_i$, et donc $f(\beta_i)^2 = \gamma_i^2 = \beta_i$. Par conséquent, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$.
Soit $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. La conjugaison par P étant un automorphisme de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, elle commute à l'évaluation des polynômes, autrement dit $g(PMP^{-1}) = Pg(M)P^{-1}$ pour tout polynôme $g(X) \in \mathbb{K}[X]$ et toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, si un polynôme $g(X)$ annule une matrice M, alors il annule toutes les matrices semblables à M.
Soit Δ la matrice diagonale ayant α_1, ..., α_n comme coefficients diagonaux. Comme le polynôme $f(X)^2 - X$ annule chaque α_i, il annule Δ. Par hypothèse, D et Δ sont semblables. Il s'ensuit que $f(X)^2 - X$ annule D, autrement dit que $f(D)^2 = D$.

b) Supposant $n \geqslant 2$, on calcule modulo X^n :

$$ \begin{aligned} \Phi(X)^2 &= \left(1 - 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1}\right)^2 \\ &= 1 - 4\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1} + 4\left(\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1}\right)^2 \\ &= 1 - 4\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1} + 4\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2} C_iC_jX^{i+j+2} \\ &\equiv 1 - 4C_0X - 4\sum_{k=0}^{n-3} C_{k+1}X^{k+2} + 4\sum_{(i,j)\in T} C_iC_jX^{i+j+2} \end{aligned} $$

où

$$\begin{aligned} T &= \left\{(i,j) \in [\![0, n-2]\!]^2 \;\middle|\; i+j \leqslant n-3\right\} \\ &= \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; i+j \leqslant n-3\right\}. \end{aligned}$$

(La dernière égalité n'est valable que modulo X^n, car on a tronqué la somme double en omettant les termes comprenant une puissance de X d'exposant supérieur ou égal à n.) Ceci nous donne

$$\Phi(X)^2 \equiv 1 - 4C_0X - 4\sum_{k=0}^{n-3}\left(C_{k+1} - \sum_{\substack{i\geqslant 0,\, j\geqslant 0\\ i+j=k}} C_iC_j\right)X^{k+2} \pmod{X^n},$$

et en utilisant la définition de la suite (C_k), nous obtenons

$$\Phi(X)^2 \equiv 1 - 4X \pmod{X^n},$$

qui vaut aussi pour $n = 1$.

Remarque : les C_k sont les nombres de Catalan.

c) On peut prendre l'image de $\Phi(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$. Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, on peut substituer $-X/4$ à X et voir que le polynôme $1 + X - \Phi(-X/4)^2$ est un multiple de X^n. Or X^n est un polynôme annulateur de toutes les matrices nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Par conséquent, $1 + X - \Phi(-X/4)^2$ est aussi un polynôme annulateur de ces matrices. Autrement dit, $\Phi(-N/4)^2 = I_n + N$ pour chaque matrice nilpotente N.

Le polynôme $g(X) = \Phi(-X/4)$ convient donc.

18.

a) Comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, chaque matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède une décomposition de Jordan $P = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotente, et D et N des polynômes en P.

Supposons à présent que P est inversible. On peut alors considérer $P^{-1}N$: c'est une matrice nilpotente car N est nilpotente et P et N commutent. Il s'ensuit que $I_n - P^{-1}N$ est inversible (d'inverse $\sum_{k=0}^{n-1}(P^{-1}N)^k$), et ainsi $D = P(I_n - P^{-1}N)$ est inversible.

L'algèbre $\mathbb{K}[P]$ des polynômes en P est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc est de dimension finie. Comme D est un polynôme en P, la multiplication à gauche par D est un endomorphisme $m \in \mathrm{End}(\mathbb{K}[P])$. Comme D est une matrice inversible, elle n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et a fortiori m est injectif. Alors m est bijectif, et l'antécédent de I_n par m est l'inverse de D. Ceci prouve que D^{-1} appartient à $\mathbb{K}[P]$: il existe un polynôme $j(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D^{-1} = j(P)$.

b) Écrivons $P = D(I_n + D^{-1}N)$, avec donc D diagonalisable et $D^{-1}N$ nilpotente. La question 17 a) permet de trouver un polynôme $f(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f(D)^2 = D$. La question 17 c) donne un polynôme $g(X)$ tel que $I_n + D^{-1}N = g(D^{-1}N)^2$. Comme D et $D^{-1}N$ commutent, $f(D)$ et $g(D^{-1}N)$ commutent. Ainsi

$$P = D(I_n + D^{-1}N) = f(D)^2 g(D^{-1}N)^2 = (f(D)g(D^{-1}N))^2,$$

ce qui conduit à choisir $R = f(D)g(D^{-1}N)$.

Par ailleurs, nous disposons de polynômes $h(X)$ et $j(X)$ tels que $D = h(P)$, $N = P - h(P)$ et $D^{-1} = j(P)$. Alors R est l'évaluation en P du polynôme

$$f(h(X))\; g(j(X)(X - h(X))).$$

c) Soit $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$. La matrice ${}^tPP$ est inversible, car produit de deux matrices inversibles. D'après la question b), il existe donc une matrice inversible S telle que $S^2 = {}^tPP$, et l'on peut même choisir S parmi les polynômes en ${}^tPP$, ce qui permet d'avoir S symétrique. Posant $Q = PS^{-1}$, on calcule alors

$$ {}^tQQ = {}^t(S^{-1})\,{}^tPPS^{-1} = ({}^tS)^{-1}S^2S^{-1} = I_n, $$

et ainsi $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K})$.

19. Sous les hypothèses de l'énoncé, il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$. En transposant, nous obtenons ${}^tA = {}^tP\,{}^tB\,{}^tP^{-1}$. Comme A et B sont symétriques, nous avons alors

$$ A = {}^tP\,B\,{}^tP^{-1} = {}^tP\,(PAP^{-1})\,{}^tP^{-1} = ({}^tPP)A({}^tPP)^{-1}, $$

c'est-à-dire A commute avec ${}^tPP$. Grâce à la question 18 c), nous pouvons écrire $P = QS$, avec $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ et S polynôme en ${}^tPP$. Alors A et S commutent, et ainsi

$$ B = PAP^{-1} = QSAS^{-1}Q^{-1} = QAQ^{-1}, $$

comme demandé.

20. Soit $(P, M) \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$. Alors la matrice $P \cdot M = PMP^{-1}$ est semblable à M, donc est nilpotente. Elle est également symétrique, car les égalités ${}^tM = M$ et ${}^tP = P^{-1}$ impliquent que ${}^t(P \cdot M) = {}^t(PMP^{-1}) = {}^tP^{-1}\,{}^tM\,{}^tP = PMP^{-1} = P \cdot M$. En conclusion, $P \cdot M \in \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

21. Soit $\mathscr{O}$ une $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbite dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$. Elle contient une matrice de la forme J_λ pour une certaine partition λ de n (question 15 a)). L'existence d'une matrice symétrique semblable à J_λ (question 16 b)) implique que $\mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ n'est pas vide.

L'intersection $\mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ est manifestement stable sous l'action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$, donc est une union de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbites. Cependant, si A et B sont deux matrices dans $\mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$, alors elles sont symétriques et semblables, donc il existe $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = Q \cdot A$ (question 19), et ainsi A et B appartiennent à une même $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbite.

Les deux alinéas précédents prouvent que si $\mathscr{O}$ une $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbite dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathscr{O}' = \mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ est une $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbite dans $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

L'application $\mathscr{O} \mapsto \mathscr{O}'$ est donc bien définie. Elle est injective car deux $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbites distinctes sont disjointes. Elle est également surjective : n'importe quelle $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbite $\mathscr{O}'$ dans $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ est incluse dans une $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbite $\mathscr{O}$ dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$, et l'inclusion $\mathscr{O}' \subset \mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ que l'on obtient alors est une égalité, vu que deux orbites sont disjointes ou égales. Notre application est donc bijective.

22.

a) On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2. Notant que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est sa propre inverse, on vérifie alors banalement que

$$ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, $$

ce qui démontre que les deux matrices de l'énoncé sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$.

(Alternativement, on pouvait observer que ces deux matrices sont nilpotentes et de carré non nul. La classification de la partie III implique alors qu'elles sont semblables à $J_{(3)}$.)

b) On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Les deux matrices de la question a) sont symétriques et semblables. Si le résultat de la question 19 était encore valable sur $\mathbb{K}$, il existerait une matrice une matrice $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$Q \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Q.$$

Écrivant $Q = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, cette équation se traduit par

$$b = h = a + d + g = c + f + i,\ e = a + g = c + i,\ a + c = g + i = b + e + h,\ d + f = b + h.$$

Substituant $b = h$ dans la pénultième équation et tenant compte de la caractéristique de $\mathbb{K}$, on obtient $e = a + c = g + i$. Comparant avec $e = a + g = c + i$, on en déduit que $a = i$ et $c = g$. On note aussi que $d + f = b + h = 0$, donc que $d = f$. De $b = a + d + g$, on déduit $a = b + c + d$ et ainsi $e = a + c = b + d$. Bref $Q = \begin{pmatrix} b+c+d & b & c \\ d & b+d & d \\ c & b & b+c+d \end{pmatrix}$ et un calcul banal donne alors

$${}^tQQ = \begin{pmatrix} b^2 & b^2+d^2 & d^2 \\ b^2+d^2 & b^2+d^2 & b^2+d^2 \\ d^2 & b^2+d^2 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice ne peut pas être I_3, puisque la deuxième ligne est proportionnelle à $(1, 1, 1)$. Ce contre-exemple montre que le résultat de la question 19 n'est plus valable en caractéristique 2.

23.

a) Pour chaque entier $i \geqslant 0$, on a $\ker(u|_F)^i = F \cap \ker u^i$. Si $i \geqslant 1$, alors l'application composée

$$F \cap \ker u^i \to \ker u^i \to \ker u^i / \ker u^{i-1}$$

a pour noyau $F \cap \ker u^{i-1}$. En factorisant, on obtient une application linéaire injective

$$\ker(u|_F)^i / \ker(u|_F)^{i-1} \to \ker u^i / \ker u^{i-1},$$

et la question 14 b) donne alors $\mu'_i \leqslant \lambda'_i$. Ceci prouve que $\mu' \subset \lambda'$: le diagramme de Ferrers de μ' est inclus dans celui de λ'. En prenant l'image par la réflexion par rapport à la bissectrice du premier quadrant, on en déduit que $\mu \subset \lambda$.

b) Commençons par une observation : pour chaque entier $i \geqslant 1$, le théorème du rang donne

$$\dim E = \dim \ker u^i + \dim \operatorname{im} u^i = \dim \ker u^{i-1} + \dim \operatorname{im} u^{i-1}\ ;$$

en combinant avec la question 14 b), on obtient

$$\lambda'_i = \dim \operatorname{im} u^{i-1} - \dim \operatorname{im} u^i.$$

Pour chaque entier $i \geqslant 0$, on a $\operatorname{im}(u|_{E/F})^i = (F + \operatorname{im} u^i)/F$. Si $i \geqslant 1$, alors l'application composée

$$\operatorname{im} u^{i-1} \to E \to E/(F + \operatorname{im} u^i)$$

a pour image $(F + \operatorname{im} u^{i-1})/(F + \operatorname{im} u^i)$ et son noyau contient $\operatorname{im} u^i$. En factorisant, on obtient une application linéaire surjective

$$\operatorname{im} u^{i-1} / \operatorname{im} u^i \to \operatorname{im}(u|_{E/F})^{i-1} / \operatorname{im}(u|_{E/F})^i.$$

Notre observation initiale donne alors $\lambda'_i \geqslant \nu'_i$. On obtient ainsi $\nu' \subset \lambda'$, puis $\nu \subset \lambda$.

Il est également possible de répondre à cette question b) en utilisant la dualité de la façon suivante. D'après la question 14 a), il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice J_λ. Dans la base duale de E^*, l'endomorphisme ${}^t u$ admet alors pour matrice ${}^t(J_\lambda)$. Or la matrice J_λ est semblable à sa transposée d'après la question 9 a) (le raisonnement qui établit ce résultat n'utilise pas les hypothèses sur $\mathbb{K}$ faites au début de la partie III). Il existe donc une base de E^* dans laquelle la matrice de ${}^t u$ est J_λ, ce qui prouve que $(E^*, {}^t u)$ est de type λ. De même, $((E/F)^*, {}^t(u|_{E/F}))$ est de type ν. Considérons maintenant la surjection canonique $p : E \to E/F$. L'endomorphisme induit $u|_{E/F}$ est défini par la relation $(u|_{E/F}) \circ p = p \circ u$. La transposée de p est une application linéaire injective et son image est l'orthogonal $F^\perp$ de F dans E^* ; elle induit donc un isomorphisme d'espaces vectoriels $j : (E/F)^* \to F^\perp$. De plus, $F^\perp$ est stable par ${}^t u$. L'égalité ${}^t p \circ {}^t(u|_{E/F}) = {}^t u \circ {}^t p$ se réécrit alors $j \circ {}^t(u|_{E/F}) = ({}^t u)|_{F^\perp} \circ j$, ce qui montre qu'à l'instar de $((E/F)^*, {}^t(u|_{E/F}))$, le couple $(F^\perp, ({}^t u)|_{F^\perp})$ est de type ν. La question a), appliquée à l'espace $(E^*, {}^t u)$ et au sous-espace $F^\perp$, nous donne alors $\nu \subset \lambda$.

24. On pose $E = \mathbb{K}^5$ et on appelle u l'endomorphisme de E ayant J_λ pour matrice dans la base canonique. Comme $\lambda' = (2, 2, 1)$, on a $\dim(\ker u) = 2$ et $\dim(\ker u^2) = 4$ d'après la question 14 b).

Examinons pour commencer les sous-espaces vectoriels F de E stables par u tels que $(F, u|_F)$ soit de type μ. Cette condition requiert que $F \subset \ker u^2$ et $\dim(\ker u|_F) = 2$. Ainsi $\ker u|_F = F \cap \ker u$ et $\ker u$ doivent être deux espaces vectoriels de même dimension : il est donc nécessaire que $F \supset \ker u$. La donnée de F est alors équivalente à celle de la droite $F/(\ker u)$ du plan vectoriel $(\ker u^2)/(\ker u)$.

Nous voulons également imposer que $(E/F, u|_{E/F})$ soit de type ν, autrement dit exclure que $(E/F, u|_{E/F})$ soit de type $(1, 1)$. (L'espace E/F étant de dimension 2, le type de $(E/F, u|_{E/F})$ appartient à $\mathscr{P}_2 = \{(2), (1, 1)\}$.) Nous observons ici que $(E/F, u|_{E/F})$ est de type $(1, 1)$ si et seulement si $u|_{E/F} = 0$, donc si et seulement si $\operatorname{im} u \subset F$, c'est-à-dire $F = \operatorname{im} u$ (puisque F et $\operatorname{im} u$ sont tous deux de dimension 3).

Les arguments qui précèdent montrent que $\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{K})$ est en bijection avec l'ensemble des droites du plan vectoriel $(\ker u^2)/(\ker u)$ privé du point $(\operatorname{im} u)/(\ker u)$. Or, un plan vectoriel sur un corps fini à q éléments contient exactement $q + 1$ droites. Ôtant un point, on trouve :

$$\left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)\right| = q.$$

(D'autres modes de raisonnement et d'autres rédactions sont possibles pour résoudre cette question.)

25.

a) Soit ℓ la longueur de λ et soit $(x_1, \ldots, x_\ell)$ une suite d'éléments de E telle que chaque x_i soit de hauteur λ_i et E soit la somme directe $\langle x_1\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$. Alors $\operatorname{im} u$ est la somme directe $\langle u(x_1)\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle u(x_\ell)\rangle_u$ et chaque $u(x_i)$ est de hauteur $\lambda_i - 1$. Supprimant de cette somme directe les sous-espaces $\langle u(x_i)\rangle_u$ pour lesquels $u(x_i) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_i = 1$, on obtient une décomposition de $\operatorname{im} u$ en somme directe de sous-espaces cycliques. On lit alors le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$: c'est la partition $(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_\ell - 1)$, les derniers termes de cette suite pouvant être nuls.

b) Soit λ° le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$. D'après la question a), son diagramme de Ferrers s'obtient en supprimant la dernière case de chacune des lignes du diagramme de λ.

L'hypothèse $u|_{E/F} = 0$ est équivalente à l'inclusion $\operatorname{im} u \subset F$. Si elle a lieu, alors le type μ de $(F, u|_F)$ vérifie $\lambda^\circ \subset \mu \subset \lambda$ (question 23 a)). Ceci signifie que le diagramme de μ s'obtient en retirant la dernière case de certaines lignes du diagramme de λ.

c) La question 14 b) nous donne

$$\dim(\ker u^i) = \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_i.$$

Notons à nouveau λ° le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$; alors, toujours d'après la question 14 b)

$$\dim \ker(u|_{\operatorname{im} u})^i = (\lambda^\circ)'_1 + \cdots + (\lambda^\circ)'_i.$$

La question a) affirme que $(\lambda^\circ)'$ s'obtient à partir de λ' en supprimant la première part λ'_1. La dernière égalité se réécrit donc

$$\dim(\operatorname{im} u \cap \ker u^i) = \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_{i+1}.$$

Par soustraction, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lambda'_1 - \lambda'_{i+1} &= \dim(\ker u^i) - \dim(\operatorname{im} u \cap \ker u^i)\\ &= \dim(\operatorname{im} u + \ker u^i) - \dim(\operatorname{im} u)\\ &= \dim((\operatorname{im} u + \ker u^i)/\operatorname{im} u).\end{aligned}$$

d) Soit i un entier positif ou nul. Comme $\operatorname{im} u \subset F$, on a

$$F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i) = \operatorname{im} u + (F \cap \ker u^i),$$

d'où

$$\begin{aligned}\dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)) &= \dim(\operatorname{im} u) + \dim(F \cap \ker u^i) - \dim(\operatorname{im} u \cap \ker u^i)\\ &= \dim(\operatorname{im} u) + \dim\ker(u|_F)^i - \dim\ker(u|_{\operatorname{im} u})^i.\end{aligned}$$

Notant encore λ° le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$, la question 14 b) donne alors

$$\dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)) - \dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^{i-1})) = \mu'_i - (\lambda^\circ)'_i$$

pour tout $i \geqslant 1$. Vu la question a), ceci se réécrit

$$\mu'_i = \lambda'_{i+1} + \dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)) - \dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^{i-1})).$$

26.

a) Considérons l'application linéaire naturelle $F \cap E_i \to E_i \to E_i/E_{i-1}$. Son noyau est $F \cap E_{i-1}$. En factorisant, on obtient donc une application linéaire injective

$$(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1}) \to E_i/E_{i-1}.$$

Par conséquent, la dimension de $(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1})$ est inférieure ou égale à celle de E_i/E_{i-1}, donc vaut 0 ou 1, ce qu'il fallait démontrer.

b) Nous allons prouver le résultat par récurrence sur $d = |I|$.

Si $d = 0$, alors $I = \varnothing$, le seul sous-espace vectoriel $F \in \mathscr{C}_I$ est le sous-espace nul, la seule famille de vecteurs I-échelonnée réduite est la famille vide, et l'énoncé est banalement vrai.

Considérons maintenant un entier $d \geqslant 1$ et supposons le résultat vrai pour $d-1$. Soit $I \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal d et soit $F \in \mathscr{C}_I$. Appelons i_d le plus grand élément de I ; ainsi F est inclus dans E_{i_d} mais pas dans E_{i_d-1}. Posons $I' = I \backslash \{i_d\}$ et $F' = F \cap E_{i_d-1}$. Alors $F' \in \mathscr{C}_{I'}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une unique base I'-échelonnée réduite $(w_1, \ldots, w_{d-1})$ de F'.

D'après la question a), F' est un hyperplan de F. Prenons un élément x de $F \backslash F'$. D'une part, $(w_1, \ldots, w_{d-1}, x)$ est une base de F ; d'autre part, $x \in E_{i_d} \backslash E_{i_d-1}$, donc x est combinaison linéaire de v_1, ..., v_{i_d} mais pas de v_1, ..., v_{i_d-1}, d'où $v^*_{i_d}(x) \neq 0$. Posons

$$w_d = \frac{1}{v^*_{i_d}(x)}\left(x - \sum_{k=1}^{d-1} v^*_{i_k}(x) w_k\right).$$

Alors $(w_1, \ldots, w_d)$ est une base de F.

Pour chaque $k \in [\![1, d-1]\!]$, le vecteur w_k appartient à F', donc à E_{i_d-1} ; par conséquent $v^*_{i_d}(w_k) = 0$. Un calcul immédiat montre alors que $v^*_{i_d}(w_d) = 1$. Soit $j \in I$ strictement inférieur à i_d ; pour $k \in [\![1, d-1]\!]$, on a alors

$$v^*_j(w_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i_k, \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

et ainsi $v^*_j(w_d) = 0$. Enfin, soit $j > i_d$; de $w_d \in F$ et $F \subset E_{i_d}$, nous déduisons alors $v^*_j(w_d) = 0$. Tout ceci montre que $(w_1, \dots, w_d)$ est une base I-échelonnée réduite de F.

Il nous reste à justifier la clause d'unicité. Supposons que $(w'_1, \dots, w'_d)$ soit une base I-échelonnée réduite de F. Pour chaque $k \in [\![1, d]\!]$, le vecteur w'_k appartient à E_{i_k}, car $v^*_j(w_k) = 0$ pour tout $j > i_k$. Les vecteurs w'_1, ..., w'_{d-1} appartiennent ainsi tous à $F' = F \cap E_{i_d-1}$. Comme ils sont linéairement indépendants, ils forment une base de F', et cette base est manifestement I'-échelonnée réduite. L'unicité dans l'hypothèse de récurrence donne alors l'égalité $(w'_1, \dots, w'_{d-1}) = (w_1, \dots, w_{d-1})$. Développons w'_d sur la base $(w_1, \dots, w_{d-1}, w_d)$:

$$w'_d = a_1 w_1 + \cdots + a_d w_d$$

avec $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^d$. En évaluant $v^*_{i_k}$ sur les deux membres de cette égalité, on obtient $a_k = 0$ pour chaque $k \in [\![1, d-1]\!]$. En évaluant $v^*_{i_d}$, on obtient $a_d = 1$. Ainsi $w'_d = w_d$ et il y a bien unicité.

L'énoncé demandé est ainsi prouvé par récurrence.

c) Soit $\mathscr{R}_I$ l'ensemble des familles I-échelonnées réduites de vecteurs de E. On définit une application $b : \mathscr{C}_I \to \mathscr{R}_I$ de la façon suivante : si $F \in \mathscr{C}_I$, alors $b(F)$ est l'unique base I-échelonnée réduite de F. Ainsi F est le sous-espace vectoriel engendré par $b(F)$. La donnée de $b(F)$ détermine donc F, et ainsi b est injective.

Prouvons que b est surjective. Soit i_1, ..., i_d les éléments de I, énumérés dans l'ordre croissant. Prenons $(w_1, \dots, w_d) \in \mathscr{R}_I$, appelons F le sous-espace vectoriel que cette famille engendre, et posons

$$J = \big\{ i \in [\![1, n]\!] \;\big|\; F \cap E_{i-1} \neq F \cap E_i \big\},$$

de sorte que $F \in \mathscr{C}_J$. Pour chaque $k \in [\![1, d]\!]$, le vecteur w_k appartient à $F \cap E_{i_k}$ (car $v^*_j(w_k) = 0$ pour tout $j > i_k$) mais pas à E_{i_k-1}, donc $i_k \in J$. Nous voyons donc que $I \subset J$, puis que

$$|I| \leqslant |J| = \dim F \leqslant d = |I|.$$

Les deux inégalités sont alors des égalités, d'où $I = J$ et $\dim F = d$, c'est-à-dire $F \in \mathscr{C}_I$ et $(w_1, \dots, w_d)$ est une base de F. Ainsi $(w_1, \dots, w_d) = b(F)$ appartient à l'image de b. Conclusion : b est bien surjective.

d) Reprenons les notations de la question c) ; en particulier $d = |I|$. Pour déterminer le cardinal de $\mathscr{C}_I$, il nous suffit de compter les éléments $(w_1, \dots, w_d)$ de $\mathscr{R}_I$. Pour chaque $k \in [\![1, d]\!]$, les contraintes imposent à w_k d'être de la forme

$$v_{i_k} + \sum_{\substack{1 \leqslant j < i_k \\ j \notin I}} a_{k,j} v_j$$

avec $a_{k,j} \in \mathbb{K}$. Il y a alors q choix pour chaque $a_{k,j}$, donc $q^{i_k - k}$ choix possibles pour w_k. Les vecteurs w_1, ..., w_d pouvant être choisis indépendamment les uns des autres, nous obtenons

$$|\mathscr{C}_I| = |\mathscr{R}_I| = \prod_{k=1}^{d} q^{i_k - k} = q^{n(I)}, \text{ avec } n(I) = \sum_{i \in I} i - \frac{|I|(|I|+1)}{2}.$$

27.

a) On pose $\varepsilon_0 = 0$ et, pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $\varepsilon_i = e_1 + \cdots + e_i$. On pose $n = \varepsilon_r = e_1 + \cdots + e_r$. On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des parties I de $[\![1, n]\!]$ telles que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$\big|\{j \in I \mid \varepsilon_{i-1} < j \leqslant \varepsilon_i\}\big| = f_i.$$

Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une suite croissante $(E_0, \ldots, E_r)$ de sous-espaces tels que $E_0 = \{0\}$, $E_r = E$ et $e_i = \dim E_i/E_{i-1}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. Ainsi E est de dimension n et chaque E_i est de dimension ε_i. On peut construire une suite $(E'_0, \ldots, E'_n)$ strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E telle que $E_i = E'_{\varepsilon_i}$ pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$ (autrement dit, on peut raffiner le drapeau partiel $(E_0, \ldots, E_r)$ en un drapeau complet $(E'_0, \ldots, E'_n)$). On peut alors considérer les ensembles $\mathscr{C}_I$ de la question 26 relativement à la suite $(E'_0, \ldots, E'_n)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$, on a alors

$$\dim(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1}) = \dim(F \cap E'_{\varepsilon_i})/(F \cap E'_{\varepsilon_{i-1}}) = \sum_{j=\varepsilon_{i-1}+1}^{\varepsilon_i} \dim(F \cap E'_j)/(F \cap E'_{j-1}).$$

En particulier, pour $F \in \mathscr{C}_I$, l'égalité $\dim(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1}) = f_i$ a lieu pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$ si et seulement si $I \in \mathscr{I}$. Ainsi, l'ensemble des sous-espaces vectoriels F de E tels que $\dim(F \cap E_i)/(F \cap E_{i-1}) = f_i$ pour chaque $i \in [\![1, r]\!]$ est l'union disjointe des $\mathscr{C}_I$ pour $I \in \mathscr{I}$.

Reprenant la notation $n(I)$ introduite dans la question 26 d), nous voyons alors que le polynôme $A_{e,f}(X) = \sum_{I \in \mathscr{I}} X^{n(I)}$ (à coefficients entiers naturels) convient.

b) Le degré du polynôme $A_{e,f}(X)$ est le maximum des $n(I)$ pour $I \in \mathscr{I}$. Ce maximum est atteint pour $I_{\max} = \bigcup_{i=1}^r [\![\varepsilon_i - f_i + 1, \varepsilon_i]\!]$. Notant $k = f_1 + \cdots + f_r$, nous calculons

$$\begin{aligned}
n(I_{\max}) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f_i} (\varepsilon_i - j + 1) - \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^r \varepsilon_i f_i - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{f_i} (j-1) - k/2 - k^2/2 \\
&= \sum_{i=1}^r \varepsilon_i f_i - \sum_{i=1}^r f_i(f_i - 1)/2 - \sum_{i=1}^r f_i/2 - k^2/2 \\
&= \sum_{j=1}^r \varepsilon_j f_j - \sum_{i=1}^r f_i^2/2 - k^2/2 \\
&= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^j e_i f_j - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} f_i f_j \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (e_i - f_i) f_j.
\end{aligned}$$

Le degré de $A_{e,f}(X)$ est ainsi égal à cette dernière expression, ce qu'il fallait démontrer.

28.

a) On pose $n = |\lambda|$, on note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, on appelle u l'endomorphisme nilpotent de E ayant J_λ pour matrice dans la base canonique, et on note λ° le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$; ainsi $(\lambda^\circ)'_i = \lambda'_{i+1}$ pour chaque $i \geqslant 1$ (question 25 a)).

Pour qu'il existe un sous-espace vectoriel F de codimension k, stable par u, tel que $u|_{E/F} = 0$ et $(F, u|_F)$ soit de type μ, il est nécessaire que $k = |\lambda| - |\mu|$ et $\lambda^\circ \subset \mu \subset \lambda$. Dans la suite de la question, nous supposerons être dans ce cas – si on ne l'est pas, il convient de prendre $B^\lambda_{\mu,(k)}(X) = 0$.

Pour $i \geqslant 1$, posons $e_i = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}$ et $f_i = \mu'_i - \lambda'_{i+1}$. Prenons r supérieur à l'indice de nilpotence de u, de sorte que $e_i = f_i = 0$ pour $i > r$. Les deux suites $e = (e_1, \ldots, e_r)$ et $f = (f_1, \ldots, f_r)$ vérifient les hypothèses de la question 27.

Nous munissons l'espace vectoriel $\widetilde{E} = E/\operatorname{im} u$ de la suite croissante $(\widetilde{E}_0, \ldots, \widetilde{E}_r)$ de sous-espaces vectoriels, où $\widetilde{E}_i = (\operatorname{im} u + \ker u^i)/\operatorname{im} u$ pour $i \geqslant 0$. D'après la question 25 c) (dont le résultat vaut aussi pour $i = 0$),

$$\begin{aligned}\dim(\widetilde{E}_i/\widetilde{E}_{i-1}) &= \dim((\operatorname{im} u + \ker u^i)/\operatorname{im} u) - \dim((\operatorname{im} u + \ker u^{i-1})/\operatorname{im} u)\\ &= (\lambda'_1 - \lambda'_{i+1}) - (\lambda'_1 - \lambda'_i)\\ &= e_i\end{aligned}$$

pour chaque $i \geqslant 1$.

D'après la question 25 d), un sous-espace F de E est stable par u et vérifie $u|_{E/F} = 0$ et $(F, u|_F)$ est de type μ si et seulement si F contient $\operatorname{im} u$ et

$$\dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)) - \dim(F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^{i-1})) = \mu'_i - \lambda'_{i+1} \qquad (\dagger)$$

pour chaque $i \geqslant 1$. Choisir un sous-espace F contenant $\operatorname{im} u$ équivaut à choisir le sous-espace $\widetilde{F} = F/\operatorname{im} u$ de $\widetilde{E}$, et l'équation $(\dagger)$ se traduit par

$$\dim(\widetilde{F} \cap \widetilde{E}_i) - \dim(\widetilde{F} \cap \widetilde{E}_{i-1}) = \mu'_i - \lambda'_{i+1} = f_i$$

pour chaque $i \geqslant 1$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, le nombre de sous-espaces vectoriels $\widetilde{F}$ vérifiant ces conditions est égal à $A_{e,f}(q)$. Le polynôme $B^{\lambda}_{\mu,(k)}(X) = A_{e,f}(X)$ répond donc à la question posée.

b) On procède par récurrence sur la longueur ℓ de κ, la question précédente réglant le cas $\ell = 1$.

On suppose désormais $\ell \geqslant 2$. On pose $k = \kappa_1$ et $\kappa^* = (\kappa_2, \kappa_3, \ldots)$; notamment κ^* est une partition de longueur $\ell - 1$ et par récurrence nous pouvons supposer que $B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(X)$ existe. On pose à nouveau $n = |\lambda|$, on note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, et on appelle u l'endomorphisme nilpotent de E dont la matrice dans la base canonique est J_λ.

Nous partitionnons $\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ selon le type de $(F_1, u|_{F_1})$: pour chaque partition ν de $n - k$, nous définissons $\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{K})$ comme étant l'ensemble des $(F_0, \ldots, F_\ell) \in \mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ tels que $(F_1, u|_{F_1})$ soit de type ν et nous considérons l'application

$$t : \mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{K}) \to \mathscr{B}^{\lambda}_{\nu,(k)}(\mathbb{K}), \quad (F_0, F_1, \ldots, F_\ell) \mapsto (F_0, F_1).$$

Fixons ν. Soit F un sous-espace de E stable par u tel que $u|_{E/F} = 0$ et $(F, u|_F)$ soit de type ν. L'application $(E, F_1, F_2, \ldots, F_\ell) \mapsto (F_1, F_2, \ldots, F_\ell)$ identifie la préimage $t^{-1}(\{(E, F)\})$ de $\{(E, F)\}$ par t à l'ensemble des suites décroissantes $(F_1, F_2, \ldots, F_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de F stables par u telles que $F_1 = F$, $(F_\ell, u|_{F_\ell})$ soit de type μ, et pour chaque $i \in [\![2, \ell]\!]$, $\dim F_{i-1}/F_i = \kappa_i$ et $u|_{F_{i-1}/F_i} = 0$.

Par construction, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : F \to \mathbb{K}^{n-k}$ tel que $f \circ (u|_F) \circ f^{-1}$ ait J_ν pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$. Le transport par f^{-1} définit alors une bijection de $\mathscr{B}^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(\mathbb{K})$ sur $t^{-1}(\{(E, F)\})$. Ainsi, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, le cardinal de $t^{-1}(\{(E, F)\})$ est égal à $B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(q)$.

D'après le principe des bergers, le cardinal de $\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{F}_q)$ est le produit du cardinal de $\mathscr{B}^{\lambda}_{\nu,(k)}(\mathbb{F}_q)$ par $B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(q)$. On en déduit l'égalité

$$\left|\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\mathbb{F}_q)\right| = \sum_{\substack{\nu \in \mathscr{P}\\ |\nu| = n-k}} \left|\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{F}_q)\right| = \sum_{\substack{\nu \in \mathscr{P}\\ |\nu| = n-k}} \left|\mathscr{B}^{\lambda}_{\nu,(k)}(\mathbb{F}_q)\right| B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(q),$$

et il suffit donc de définir

$$B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X) = \sum_{\nu\in\mathscr{P}} B^{\lambda}_{\nu,(k)}(X)\ B^{\nu}_{\mu,\kappa^*}(X)$$

pour répondre à la question.

Détricotant la récurrence, nous obtenons la formule

$$B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X) = \sum_{(\nu_1,\dots,\nu_{\ell-1})\in\mathscr{P}^{\ell-1}} B^{\lambda}_{\nu_1,(\kappa_1)}(X)\ B^{\nu_1}_{\nu_2,(\kappa_2)}(X)\ \cdots\ B^{\nu_{\ell-1}}_{\mu,(\kappa_\ell)}(X)$$

qui montre que notre polynôme $B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X)$ est bien à coefficients entiers positifs.

c) Nous adoptons les notations de l'énoncé et notons ℓ la longueur de κ.

Supposons que $B^{\nu}_{\varnothing,\kappa}(X) \neq 0$. Alors pour des raisons de dimension $|\kappa| = |\nu'|$. De plus, il existe une puissance q d'un nombre premier telle que $B^{\nu}_{\varnothing,\kappa}(q) \neq 0$. Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ et considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme nilpotent u de E tels que (E,u) soit de type ν. Par hypothèse, il existe une suite décroissante $(F_0,\dots,F_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de E stables par u telle que $F_0 = E$, $F_\ell = \{0\}$, et pour chaque $i \in [\![1,\ell]\!]$, $\dim F_{i-1}/F_i = \kappa_i$ et $u|_{F_{i-1}/F_i} = 0$. Ces conditions imposent que $\operatorname{im} u^i \subset F_i$. Or

$$\dim(E/F_i) = \kappa_1 + \cdots + \kappa_i \ \text{ et } \ \dim(E/\operatorname{im} u^i) = \dim(\ker u^i) = \nu'_1 + \cdots + \nu'_i$$

d'après la question 14 b). On en déduit que

$$\kappa_1 + \cdots + \kappa_i \leqslant \nu'_1 + \cdots + \nu'_i,$$

et ceci est vrai pour tout $i \in [\![1,\ell]\!]$, et même pour tout $i \geqslant 1$ puisque κ est de longueur ℓ. Ainsi nécessairement $\kappa \leqslant \nu'$.

Supposons maintenant que $\kappa = \nu'$. Alors chaque inclusion $\operatorname{im} u^i \subset F_i$ est une égalité, ce qui signifie que la seule possibilité pour $(F_0,F_1,\dots,F_\ell)$ est la suite des images itérées $(E,\operatorname{im} u,\dots,\operatorname{im} u^\ell)$. Celle-ci remplissant les conditions exigées, nous avons $B^{\nu}_{\varnothing,\kappa}(q) = 1$. Ceci étant vrai pour tout q, nous concluons que si $\kappa = \nu'$, alors $B^{\nu}_{\varnothing,\kappa}(X) = 1$.

d) Commençons par le cas où κ n'a qu'une seule part, égale à k. Pour que $B^{\lambda}_{\mu,(k)}(X)$ ne soit pas nul, il est nécessaire que

$$\lambda^\circ \subset \mu \subset \lambda \ \text{ et } \ k = |\lambda| - |\mu| = |\lambda'| - |\mu'| = \sum_{i\geqslant 1}(\lambda'_i - \mu'_i),$$

où λ° est le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$. Pour $i \geqslant 1$, posons $e_i = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}$ et $f_i = \mu'_i - \lambda'_{i+1}$. Les questions 27 et 28 a) nous donnent l'expression suivante :

$$\deg B^{\lambda}_{\mu,(k)}(X) = \deg A_{e,f}(X) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j}(e_i - f_i)f_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant j}(\lambda'_i - \mu'_i)(\mu'_j - \lambda'_{j+1})$$

(cette somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls). Calculons maintenant :

$$\begin{aligned}
&d(\lambda) - d(\mu) - d(\kappa') \\
&\quad = \sum_{i\geqslant 1} \frac{\lambda'_i(\lambda'_i - 1) - \mu'_i(\mu'_i - 1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}\Big((\lambda'_i)^2 - \lambda'_i - (\mu'_i)^2 + \mu'_i\Big) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1}\lambda'_i - \sum_{i\geqslant 1}\mu'_i\right)^2 + \frac{k}{2} \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{i\geqslant 1}\Big((\lambda'_i)^2 - (\mu'_i)^2\Big) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1}\lambda'_i\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 1}\mu'_i\right)^2 + \left(\sum_{i\geqslant 1}\lambda'_i\right)\left(\sum_{i\geqslant 1}\mu'_i\right) \\
&\quad = -\sum_{1\leqslant i<j}\lambda'_i\lambda'_j - \sum_{1\leqslant i\leqslant j}\mu'_i\mu'_j + \sum_{1\leqslant i\leqslant j}\lambda'_i\mu'_j + \sum_{1\leqslant i<j}\mu'_i\lambda'_j \\
&\quad = \sum_{1\leqslant i\leqslant j}\big(-\lambda'_i\lambda'_{j+1} - \mu'_i\mu'_j + \lambda'_i\mu'_j + \mu'_i\lambda'_{j+1}\big) \\
&\quad = \sum_{1\leqslant i\leqslant j}(\lambda'_i - \mu'_i)(\mu'_j - \lambda'_{j+1}).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi $\deg B^{\lambda}_{\mu,(k)}(X) = d(\lambda) - d(\mu) - d(\kappa')$, comme désiré.
Dans le cas général où κ est de longueur ℓ, on écrit

$$\begin{aligned}
\deg B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X) &= \deg\left(\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_{\ell-1})\in\mathscr{P}^{\ell-1}} B^{\lambda}_{\nu_1,(\kappa_1)}(X)\, B^{\nu_1}_{\nu_2,(\kappa_2)}(X)\ \cdots\ B^{\nu_{\ell-1}}_{\mu,(\kappa_\ell)}(X)\right) \\
&= \max_{(\nu_1,\dots,\nu_{\ell-1})\in\mathscr{P}^{\ell-1}}\Big(\deg B^{\lambda}_{\nu_1,(\kappa_1)}(X) + \cdots + \deg B^{\nu_{\ell-1}}_{\mu,(\kappa_\ell)}(X)\Big).
\end{aligned}$$

(La dernière égalité devrait en principe n'être qu'une majoration, cependant aucune annulation des termes de plus haut degré n'est à redouter ici, puisque tous les termes de la somme sont des polynômes à coefficients positifs.) Substituant l'expression obtenue précédemment pour le cas particulier où κ n'a qu'une seule part, on parvient à

$$\begin{aligned}
\deg B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X) &= d(\lambda) - d(\mu) - \frac{\kappa_1(\kappa_1-1)}{2} - \frac{\kappa_2(\kappa_2-1)}{2} - \dots - \frac{\kappa_\ell(\kappa_\ell-1)}{2} \\
&= d(\lambda) - d(\mu) - d(\kappa').
\end{aligned}$$

29. Nous commençons par définir des polynômes $C_{\nu,\kappa}(X)$ à coefficients entiers, nuls si $|\nu| \neq |\kappa|$, et tels que pour tous $(\nu,\kappa) \in \mathscr{P}^2$

$$\sum_{\rho\in\mathscr{P}} B^{\nu}_{\varnothing,\rho}(X)\, C_{\rho,\kappa}(X) = \sum_{\rho\in\mathscr{P}} C_{\nu,\rho}(X)\, B^{\rho}_{\varnothing,\kappa}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \kappa, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (\ddagger)$$

À cette fin, prenons un entier naturel n et énumérons les éléments de $\mathscr{P}_n$ de façon que si $\lambda \leqslant \mu$, alors λ apparaisse dans la liste avant μ. La matrice $(B^{\nu'}_{\varnothing,\kappa}(X))_{(\nu,\kappa)\in(\mathscr{P}_n)^2}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$, est alors triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, d'après la question 28 c). Elle est donc inversible et son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$. Pour $(\nu,\kappa) \in (\mathscr{P}_n)^2$, nous définissons alors $C_{\nu,\kappa}(X)$ comme le coefficient d'indice (ν,κ') dans cette matrice inverse.

Soit $(\lambda,\mu,\kappa) \in \mathscr{P}^3$ tel que $|\lambda| = |\mu| + |\kappa|$ et soit ℓ la longueur de κ. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Nous partitionnons $\mathscr{B}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ selon le type de $(E/F_\ell, u|_{E/F_\ell})$: pour chaque $\nu \in \mathscr{P}$, nous définissons $\mathscr{F}^{\lambda}_{\mu,\kappa}(\nu,\mathbb{K})$ comme

étant l'ensemble des $(F_0, \dots, F_\ell) \in \mathscr{B}^\lambda_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ tels que $(E/F_\ell, u|_{E/F_\ell})$ soit de type ν et nous considérons l'application

$$s : \mathscr{F}^\lambda_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{K}) \to \mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{K}), \quad (F_0, F_1, \dots, F_\ell) \mapsto F_\ell.$$

Fixons une partition ν telle que $\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{K}) \neq \varnothing$; cela impose $|\nu| = |\kappa|$. Soit $F \in \mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{K})$. La préimage $s^{-1}(\{F\})$ de $\{F\}$ par s est l'ensemble des suites décroissantes $(F_0, F_1, \dots, F_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de E stables par u telles que $F_0 = E$, $F_\ell = F$, et pour chaque $i \in [\![1, \ell]\!]$, $\dim F_{i-1}/F_i = \kappa_i$ et $u|_{F_{i-1}/F_i} = 0$.

Posons $\widetilde{E} = E/F$. Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : \widetilde{E} \to \mathbb{K}^{|\nu|}$ tel que $f \circ (u|_{\widetilde{E}}) \circ f^{-1}$ ait J_ν pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^{|\nu|}$. Le transport par f^{-1} définit alors une bijection de $\mathscr{B}^\nu_{\varnothing,\kappa}(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des suites décroissantes $(\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1, \dots, \widetilde{F}_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de $\widetilde{E}$ stables par $u|_{\widetilde{E}}$ telles que $\widetilde{F}_0 = \widetilde{E}$, $\widetilde{F}_\ell = \{0\}$, et pour chaque $i \in [\![1, \ell]\!]$, $\dim \widetilde{F}_{i-1}/\widetilde{F}_i = \kappa_i$ et $u|_{\widetilde{F}_{i-1}/\widetilde{F}_i} = 0$.

On voit ainsi que $s^{-1}(\{F\})$ est en bijection avec $\mathscr{B}^\nu_{\varnothing,\kappa}(\mathbb{K})$. Nous en déduisons, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, que le cardinal de $s^{-1}(\{F\})$ est égal à $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q)$. D'après le principe des bergers, le cardinal de $\mathscr{F}^\lambda_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{F}_q)$ est le produit du cardinal de $\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)$ par $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q)$, et donc

$$B^\lambda_{\mu,\kappa}(q) = \left|\mathscr{B}^\lambda_{\mu,\kappa}(q)\right| = \sum_{\nu \in \mathscr{P}} \left|\mathscr{F}^\lambda_{\mu,\kappa}(\nu, \mathbb{F}_q)\right| = \sum_{\nu \in \mathscr{P}} \left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)\right| B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q).$$

Utilisant l'identité (‡), il vient

$$\sum_{\rho \in \mathscr{P}} B^\lambda_{\mu,\rho}(q)\, C_{\rho,\nu}(q) = \sum_{(\rho,\sigma) \in \mathscr{P}^2} \left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\sigma}(\mathbb{F}_q)\right| B^\sigma_{\varnothing,\rho}(q)\, C_{\rho,\nu}(q) = \left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)\right|$$

et il suffit donc de définir le polynôme à coefficients entiers

$$G^\lambda_{\mu,\nu}(X) = \sum_{\rho \in \mathscr{P}} B^\lambda_{\mu,\rho}(X)\, C_{\rho,\nu}(X)$$

pour répondre à la question.

30. La matrice $(C_{\nu,\kappa'}(X))_{(\nu,\kappa) \in (\mathscr{P}_n)^2}$ est l'inverse de la matrice $(B^{\nu'}_{\varnothing,\kappa}(X))_{(\nu,\kappa) \in (\mathscr{P}_n)^2}$. Ces deux matrices sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. Nous allons prouver l'énoncé suivant : si $C_{\nu,\kappa'}(X) \neq 0$, alors $\nu \geqslant \kappa$ et $\deg C_{\nu,\kappa'}(X) \leqslant d(\nu') - d(\kappa')$.

Nous raisonnons par récurrence forte sur $N(\kappa) = \left|\{\sigma \in \mathscr{P}_n \mid \sigma \geqslant \kappa\}\right|$. Supposons que $C_{\nu,\kappa'}(X) \neq 0$. Le cas $\nu = \kappa$ est banal puisqu'alors $C_{\nu,\kappa'}(X) = 1$. Nous nous plaçons donc dans le cas $\nu \neq \kappa$ et rappelons la relation (‡) :

$$\sum_{\rho \in \mathscr{P}_n} C_{\nu,\rho'}(X)\, B^{\rho'}_{\varnothing,\kappa}(X) = 0.$$

Prenant en compte le résultat de la question 28 c), nous obtenons

$$C_{\nu,\kappa'}(X) = -\sum_{\substack{\rho \in \mathscr{P}_n \\ \rho > \kappa}} C_{\nu,\rho'}(X)\, B^{\rho'}_{\varnothing,\kappa}(X).$$

Pour chaque terme de la somme à droite, on a $N(\rho) < N(\kappa)$, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Ainsi :

— Le membre de gauche n'étant pas nul par hypothèse, un terme de la somme à droite doit être non nul : il existe donc un $\rho > \kappa$ tel que $C_{\nu,\rho'}(X) \neq 0$. L'hypothèse de récurrence nous donne $\nu \geqslant \rho$, d'où $\nu > \kappa$.

— Pour chaque $\rho > \kappa$, l'hypothèse de récurrence et la question 28 d) nous donnent

$$\deg\Big(C_{\nu,\rho'}(X)\ B^{\rho'}_{\varnothing,\kappa}(X)\Big) \leqslant d(\nu') - d(\rho') + \deg B^{\rho'}_{\varnothing,\kappa}(X) = d(\nu') - d(\kappa').$$

Nous en déduisons que $\deg C_{\nu,\kappa'}(X) \leqslant d(\nu') - d(\kappa')$.

Pour conclure, il suffit de combiner nos deux estimations

$$\deg B^{\lambda}_{\mu,\kappa}(X) = d(\lambda) - d(\mu) - d(\kappa') \text{ et } \deg C_{\nu,\kappa'}(X) \leqslant d(\nu') - d(\kappa')$$

avec la définition

$$G^{\lambda}_{\mu,\nu}(X) = \sum_{\rho\in\mathscr{P}} B^{\lambda}_{\mu,\rho}(X)\ C_{\rho,\nu}(X).$$

3.3 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

3.3.1 Présentation du sujet.

Le point de départ est la factorisation eulérienne la plus connue :

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad \sin(z) = z \prod_{k\in\mathbf{N}^\star}\left(1 - \frac{z^2}{(k\pi)^2}\right) = z \prod_{k\in\mathbf{N}^\star}\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{k\pi}\right).$$

Cette formule fut montrée par Euler dans le but d'obtenir la formule $\sum_{k\in\mathbf{N}^\star} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (résolution de ce qui fut appelé problème de Bâle). Cette formule est la généralisation de la factorisation d'un polynôme complexe en produit de polynômes de degré 1. La partie **II** du sujet propose une nouvelle preuve de la formule précédente [1] par passage à la limite, pour $n \to +\infty$, de la formule explicite

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(\pi k)^2}\right) \times \frac{1}{2W_{2n}} \int_{-1}^{1} e^{-izx} \cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x$$

où $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'intégrales de type Wallis étudiées dans la partie **I**.

La partie **III** adapte l'idée initiale de Euler pour calculer les valeurs de la fonction ζ sur $2\mathbf{N}^\star$ en exploitant la formule explicite précédente.

Bien que cela ne soit pas abordé dans le sujet, ajoutons quelques commentaires historiques. Depuis l'avènement de la théorie des fonctions holomorphes, il est apparu que ce type de factorisation (factorisation à la Weierstrass) est satisfait pour des fonctions holomorphes ayant une croissance de type exponentiel (cela induit automatiquement un certain comportement des zéros de la fonction via la formule de Jensen). Les factorisations les plus connues sont

$$\forall z \in \mathbf{C} \qquad \sin(\pi z) = \pi z \prod_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}\left(1 - \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{n}} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}$$

où Γ et γ sont respectivement la fonction et la constante d'Euler (voir par exemple [Schwartz, page 412]). Le théorème qui permet de telles factorisations est généralement attribué à Weierstrass (voir [Rudin, théorème 15.9]) ou à Hadamard, voir [Saks-Zygmund, page 332], même si c'est le cadre méromorphe auquel le nom de Hadamard reste attaché.

1. certainement pas la plus courte, voir par exemple [MVT] pour des arguments expéditifs