

### 3.3 Proposition de corrigé du problème d'analyse et probabilités

#### Première partie

1.a) Nous montrons que l'intégrale généralisée  $h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$  définissant  $g$  est absolument convergente, donc convergente.

L'application  $t \mapsto |\exp(-t)f(t)|$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc localement intégrable sur  $[x, +\infty[$ . Pour lever l'indétermination en  $+\infty$  on utilise la majoration  $|\exp(-t)f(t)| \leq \|f\|_\infty \exp(-t)$  qui donne l'intégrabilité en  $+\infty$ .

L'application  $g$  est continue comme produit de deux fonctions continues  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t} dt$ . De plus

$$|g(x)| \leq \exp(x) \int_x^{+\infty} \|f\|_\infty \exp(-t) dt = \|f\|_\infty. \quad (3.1)$$

Remarquons que cela implique  $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ .

1.b) L'application  $h : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t} dt$ , bien définie par 1.a), est de classe  $C^1$  car primitive de  $x \mapsto -f(x)\exp(-x)$  qui est une application continue. Alors  $g$  est de classe  $C^1$  comme produit de deux fonctions de classe  $C^1$   $x \mapsto e^x$  et  $h(x)$ . On a en dérivant le produit

$$g'(x) = g(x) + \exp(x)(-f(x)\exp(-x)) = g(x) - f(x).$$

2.a) Par linéarité de l'intégrale ( $f \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ ) l'application  $S$  est linéaire ; de plus l'inégalité (3.1) assure que  $S$  est continue en 0 ; en effet en passant au sup sur  $x$  il vient  $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ . L'application  $S$  est donc continue car linéaire et continue en 0.

2.b) L'inégalité précédente assure que  $\|S\|_{\mathcal{L}(CB(\mathbb{R}))} \leq 1$ . Si on choisit  $f$  égale à la fonction constante 1, notée  $\mathbb{1}$ , il vient  $S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ , par conséquent  $1 = \|\mathbb{1}\|_\infty \leq \|S\|_{\mathcal{L}(CB(\mathbb{R}))} \|\mathbb{1}\|_\infty$  et donc  $\|S\|_{\mathcal{L}(CB(\mathbb{R}))} = 1$ .

3.a) Démonstration 1 : Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est évanescente il existe  $M$  assez grand tel que  $t > M$  entraîne  $|f(t)| \leq \varepsilon$ . Pour  $x > M$  on a alors

$$|g(x)| \leq \exp(x) \int_x^\infty \varepsilon \exp(-t) dt = \varepsilon.$$

Démonstration 2 : On observe par le changement de variable  $y = t - x$  dans l'intégrale que  $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} f(y+x) dy$ . On va appliquer le théorème de convergence sous le signe  $\int$  de Lebesgue.

—  $y \mapsto e^{-y} f(y+x)$  mesurable car continue sur  $[0, +\infty[$ .

- A  $y$  fixé,  $e^{-y}f(y+x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers l'infini car  $f$  évanescence.
- Contrôle :  $|e^{-y}f(y+x)| \leq \|f\|_\infty \exp(-y)$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

3.b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est évanescence il existe  $M$  assez grand positif tel que  $t < -M$  entraîne  $|f(t)| \leq \varepsilon$ . Alors, pour  $x < -M$

$$|g(x)| \leq \exp(x) \int_x^{-M} |f(t)| \exp(-t) dt + \exp(x) \int_{-M}^{+\infty} |f(t)| \exp(-t) dt.$$

Le premier terme du membre de droite de cette inégalité est borné par  $\varepsilon$ , le second par  $\|f\|_\infty \exp(x+M)$ . On en déduit

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} |g(x)| \leq \varepsilon + 0.$$

Faire  $\varepsilon \rightarrow 0$  conclut. NB : on peut aussi appliquer aussi la démonstration alternative de la question précédente.

3.c) En combinant les résultats des questions 2.a), 3.a) et 3.b) on a que  $g \in E$ . Comme l'application  $\Upsilon$  envoie  $E$  dans  $E$ , l'application  $\tilde{g}$  est aussi dans  $E$ .

4.a) On coupe en deux l'intégrale suivant la position de  $t$  par rapport à  $x$  ;

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-|x-t|) f(t) dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt + e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t f(t) dt.$$

La première intégrale dans dans le membre de droite de cette égalité est  $g(x)$ . Pour la seconde intégrale, en effectuant le changement de variable  $t \mapsto -t$  il vient  $e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t f(t) dt = e^{-x} \int_{-x}^{+\infty} e^{-t} f(-t) dt = \tilde{g}(x)$ .

4.b) On obtient en dérivant  $g + \tilde{g}$  que

$$2u'(x) = (g(x) - f(x)) - \tilde{g}(x) + f(x) = g(x) - \tilde{g}(x),$$

qui est bien de classe  $C^1$ .

4.c) En redérivant l'expression obtenue en 4.b) il vient  $2u''(x) = g(x) + \tilde{g}(x) - 2f(x)$  d'où le résultat.

5.a) L'application  $x \mapsto u(x)$  est une solution évanescence à l'équation différentielle considérée.

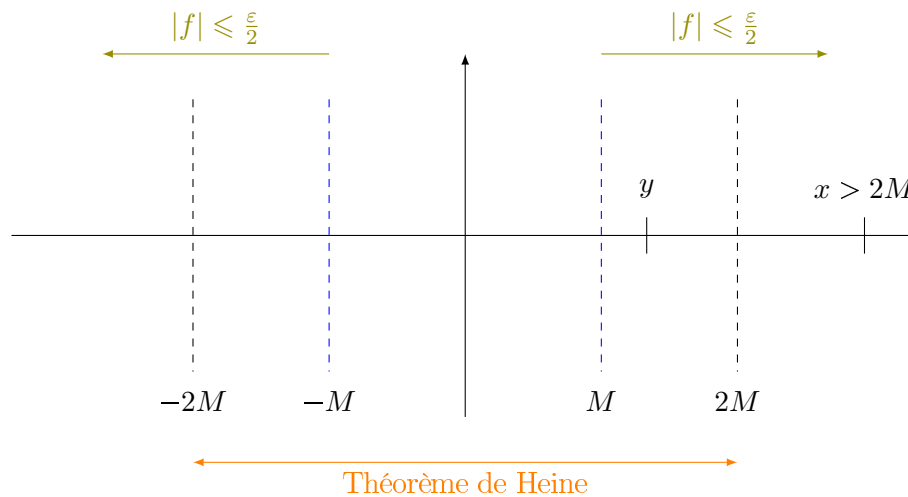
5.b) Si il existait deux solutions évanescences à l'équation différentielle considérée, leur différence  $w$  serait solution de l'équation différentielle homogène  $z'' - z = 0$ . Donc  $w(x) = Ae^x + Be^{-x}$ . Faire  $x$  tendre successivement vers  $+\infty$  et  $-\infty$  donne  $A = B = 0$  d'où l'unicité.

## Deuxième partie

6.a) Comme  $f$  est évanescence, il existe  $M$  positif assez grand tel que pour  $|x| > M$  alors  $|f(x)| \leq 1$ . Sur le compact  $[-M, M]$  la fonction continue  $f$  est bornée ; soit  $|f(x)| \leq C_M$  pour  $|x| \leq M$ . On a alors  $\|f\|_\infty \leq \max(1, C_M) < +\infty$ .

6.b) Si  $\|f\|_\infty = 0$  alors  $f$  est identiquement nulle et le résultat est immédiat. Si  $\|f\|_\infty > 0$ , vu que  $f$  est évanescence, il existe  $M$  positif assez grand tel que pour  $|x| > M$  alors  $|f(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2}$ . Dès lors  $\|f\|_\infty = \sup_{|x| \leq M} |f(x)|$ . Une fonction continue sur un compact étant bornée et atteignant ses bornes, il existe  $x_0$  dans  $[-M, M]$  tel que  $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$ .

6.c) On veut montrer que : pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\alpha > 0$  tel que  $|x-y| < \alpha$  implique  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  (uniforme continuité). Tout d'abord  $f$  étant évanescence il existe  $M$  positif assez grand tel que pour  $|x| > M$  alors  $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Par ailleurs, le théorème de Heine assure que  $f$  est *uniformément continue* sur le compact  $[-2M, 2M]$  (une fonction continue sur un compact est uniformément continue). Il existe donc  $\alpha > 0$  (on peut supposer  $\alpha < M$ ) tel que  $|x|, |y| \leq 2M$  et  $|x-y| \leq \alpha$  entraîne  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .



Soient maintenant  $x, y$  qui vérifient  $|x - y| < \alpha$  et par exemple  $x$  n'est pas dans  $[-2M, 2M]$ . Prenons  $x > 2M$  pour se fixer les idées, l'autre cas étant symétrique. Nécessairement  $y \geq x - |x - y| \geq 2M - \alpha \geq M$ . Alors par définition de  $M$  il vient  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

7.a) L'ensemble  $E$  contient 0 la fonction nulle. Par 6.a)  $E$  est un sous-ensemble de  $CB(\mathbb{R})$ . Comme il est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de  $CB(\mathbb{R})$ .

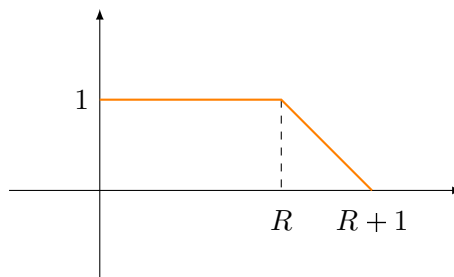
7.b) Soit  $f_n$  une suite d'éléments de  $E$  qui converge vers  $f$  dans  $CB(\mathbb{R})$ , c'est à dire uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Par le "théorème de la double limite",  $f$  est évanescente; en effet

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

7.c) L'ensemble  $E$  est un sous-espace vectoriel fermé dans un espace de Banach  $CB(\mathbb{R})$ ; c'est donc aussi un Banach, pour la même norme.

8.a) Par les résultats de la partie 1 (1.a) et 3.c) notamment),  $T$  envoie bien  $E$  dans  $E$ . L'application  $T$  est clairement linéaire par linéarité de l'intégrale. L'inégalité (3.1) appliquée à  $S$  et à  $\Upsilon S \Upsilon$  donne que  $T$  est continue et  $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$ .

8.b) On vient de voir  $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$ . Montrons l'inégalité inverse. La fonction constante égale à 1 n'est pas dans  $E$ . Soit  $R > 0$  grand. On considère la fonction paire  $x \mapsto f_R(x)$  définie comme suit :  $f_R(x) = 1$  si  $|x| \leq R$ ,  $f_R(x) = 0$  si  $|x| \geq R + 1$  et  $f_R$  est égale à  $R + 1 - |x|$  sinon.



On a  $\|T(f_R)\|_\infty \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E)}$ . D'autre part,

$$\|T(f_R)\|_\infty \geq T(f_R)(0) = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \exp(-|t|) dt = 1 + o(1),$$

quand  $R$  tend vers l'infini; d'où le résultat.

8.c) Soit  $f$  dans  $E$  telle que  $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty > 0$ . Soit  $x_0$  le point où  $|T(f)|$  atteint son maximum. Quitte à changer  $f$  en  $-f$  on peut supposer  $T(f)(x_0) = \|f\|_\infty$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t - x_0|)(\|f\|_\infty - f(t))dt = 0.$$

L'intégrand étant continu et positif alors  $f(t) = \|f\|_\infty$  est constante. Impossible, la seule fonction évanescence constante étant nulle.

9.a) Par le changement de variable  $y = \lambda t$ , il vient

$$T_\lambda(\mathbb{1})(x) = \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda|t|)dt = 1.$$

9.b) Par le changement de variable  $y = \lambda t$ , et par parité, il vient

$$\lambda \int_{|t| > \alpha} \exp(-\lambda|t|)dt = 2 \int_{\lambda\alpha}^{+\infty} \exp(-t)dt = 2e^{-\lambda\alpha} \rightarrow 0,$$

quand  $\lambda$  tend vers l'infini.

9.c) La fonction  $f$  est uniformément continue. Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\alpha > 0$  tel que  $|t| < \alpha$  implique  $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon$ . On écrit, par 9.a)

$$\begin{aligned} 2|T_\lambda(f)(x) - f(x)| &= \lambda \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} (f(x-t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \lambda \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} |f(x-t) - f(x)| dt. \end{aligned}$$

On coupe en deux l'intégrale du membre de droite de cette inégalité suivant  $|t| < \alpha$  et  $|t| \geq \alpha$ . D'une part

$$\lambda \int_{|t| < \alpha} \exp(-|t|) |f(x-t) - f(x)| dt \leq \lambda \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|) dt = 2\varepsilon.$$

D'autre part

$$\lambda \int_{|t| \geq \alpha} \exp(-|t|) |f(x-t) - f(x)| dt \leq 2\|f\|_\infty \lambda \int_{|t| \geq \alpha} \exp(-|t|) dt.$$

On en déduit

$$\|T_\lambda(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon + 4\|f\|_\infty \int_{\lambda\alpha}^{+\infty} \exp(-t) dt.$$

Faire  $\lambda$  tend vers l'infini donne grace à 9.b)

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \|T_\lambda(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Faire  $\varepsilon \rightarrow 0$  conclut.

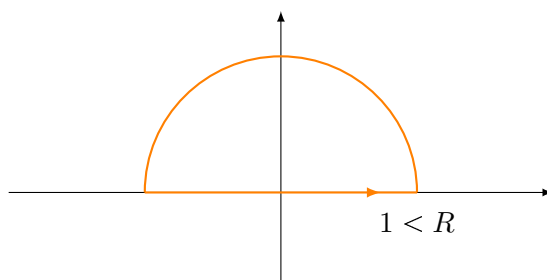
9.d) Par le changement de variable  $y = \lambda t$  dans la définition de  $T_\lambda(f(x))$  on voit que  $T_\lambda(f)(x) = T(f_\lambda)(\lambda x)$  avec  $f_\lambda(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ . Par 9.c) cette fonction converge uniformément vers  $f$ . D'après les résultats de la Partie 1 cette fonction est évanescence et de classe  $C^2$ .

10.a) On peut observer que  $F$  est la transformée de Fourier d'une fonction intégrable (utiliser notamment le lemme de Riemann-Lebesgue pour l'évanescence) ou raisonner comme suit. Par le théorème de convergence dominée (contrôle  $\frac{|\cos(tx)|}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ , l'intégrand étant continu en les deux variables  $t$  et  $x$ ), on a que l'application  $F$  est bien continue sur  $\mathbb{R}$ . Il reste à montrer qu'elle est évanescente. Par intégration par parties, en posant  $v'(t) = \cos(tx)$  et  $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$ , il vient, pour  $x$  non nul

$$|F(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tx)2t}{x(1+t^2)^2} dt \right| \leq \frac{1}{|x|} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Faire  $|x|$  tend vers l'infini conclut.

10.b) Par parité de  $x \mapsto F(x)$ , on va calculer l'intégrale pour  $x \geq 0$ , et dans le résultat final du calcul remplacer  $x$  par  $|x|$ . Soient  $0 < 1 < R$ . On choisit comme contour, parcouru dans le sens trigonométrique, la réunion de l'arc de cercle  $\Gamma_1 = \{R \exp(i\theta); \theta \in [0, \pi]\}$  avec le segment de droite horizontal  $\Gamma_2 = \{x \in [-R, R]\}$ . Soit  $\Gamma$  le contour ainsi obtenu.



En son intérieur  $\Gamma$  contient comme pôle de la fonction méromorphe  $z \mapsto F(z)$  le pôle simple  $z = i$ . La formule des résidus donne alors, vu que  $(1+z^2)' = 2z$ ,

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = 2i\pi \left[ \frac{\exp(izx)}{2z} \right]_{z=i} = \pi \exp(-x).$$

La contribution du bord horizontal s'écrit

$$\int_{-R}^R \frac{\exp(izx)}{1+z^2} dz = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx + o(1),$$

quand  $R$  tend vers l'infini. La contribution du grand arc de cercle se majore comme suit

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{\exp(ixRe^{i\theta})}{1+R^2e^{2i\theta}} Ri \exp(i\theta) d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{|\exp(ixRe^{i\theta})|}{R^2-1} R d\theta.$$

Vu que  $|\exp(ixRe^{i\theta})| = \exp(-xR \sin \theta) \leq 1$ , la contribution du grand arc de cercle tend vers 0 quand  $R$  tend vers l'infini. En conclusion  $F(x) = \pi \exp(-|x|)$ .

### Troisième partie

11) Par les résultats de la Partie 1, la solution évanescente de l'équation différentielle  $-u'' + u = f$  avec  $f$  évanescente est donnée par  $u = Tf$ . Si  $u$  est solution évanescente de l'équation non linéaire (3), en posant  $f = \frac{3}{2}u^2$  qui est aussi évanescente, alors  $u(x) = \frac{3}{2}T(u^2)(x)$ . L'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} \exp(-|x-t|)u^2(t)dt$  est positive ou nulle donc  $u = \frac{3}{2}T(u^2)(x) \geq 0$ . De plus si  $u$  n'est pas identiquement nulle, l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} \exp(-|x-t|)u^2(t)dt$  est strictement positive comme intégrale d'une fonction continue positive non nulle partout. Donc  $u(x) > 0$ .

12.a) Comme solution de l'équation différentielle non linéaire (3)  $u$  est de classe  $C^2$ . Comme  $u$  est bornée, alors  $u'' = u - \frac{3}{2}u^2$  est aussi bornée.

12.b) Par la formule de Taylor avec reste de Lagrange, et en utilisant 11) et 12.a), on a pour tout  $x, h$  dans  $\mathbb{R}$  il existe  $\xi$  entre  $x$  et  $x + h$  tel que

$$0 < u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(\xi)\frac{h^2}{2} \leq u(x) + u'(x)h + \|u''\|_{\infty}\frac{h^2}{2}.$$

12.c) Ecartons le cas  $\|u''\|_{\infty} = 0$ . Dans ce cas la fonction  $u$  est une fonction affine. Comme elle est évanescence elle est identiquement nulle. Impossible. Par conséquent  $\|u''\|_{\infty} > 0$ . Le polynôme du second degré  $h \mapsto u(x) + u'(x)h + \|u''\|_{\infty}\frac{h^2}{2}$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ ; son discriminant  $(u'(x))^2 - 2\|u''\|_{\infty}u(x)$  est alors strictement négatif; d'où le résultat.

12.d) Comme  $u'' = u - \frac{3}{2}u^2$  on a que  $u''$  est aussi évanescence. L'inégalité du 12.c) assure aussi que  $u'$  est évanescence (faire  $|x|$  tend vers  $+\infty$ ).

13.a) En multipliant l'équation différentielle non linéaire (3) par  $u'(x)$  et en intégrant en  $x$  il vient alors qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $x$

$$-u'(x)^2 + u(x)^2 = u(x)^3 + C.$$

Faire  $x$  tend vers l'infini en utilisant que  $u$  et  $u'$  sont évanescences donne  $C = 0$ . D'où le résultat, i.e.  $u'(x)^2 = u(x)^2(1 - u(x))$ .

13.b) De l'égalité précédente on déduit que  $u(x) \leq 1$  pour tout  $x$ . On sait que  $u(x) > 0$  par 11).

13.c) Soit  $x$  un point où  $u$  réalise son maximum. Alors  $u'(x) = 0$ . Par la formule de 13.a), comme  $u$  ne peut s'annuler, on a  $u(x) = 1$ .

13.d) On va montrer par l'absurde que  $M$  ne peut contenir qu'un point (il en contient au moins un d'après 6.b) car  $u$  est évanescence, positive, non identiquement nulle). Soient  $a < b$  deux points dans  $M$ . Soit  $y \in ]a, b[$  qui réalise le minimum de  $u$  sur  $[a, b]$  (si  $u$  non constante). Alors  $u'(y) = 0$  ce qui entraîne par 13.a) que  $u(y) = 1$  (car  $u$  ne peut s'annuler). Impossible, donc  $u$  est constante égale à 1 sur l'intervalle  $]a, b[$ . En reportant dans  $-u'' + u - \frac{3}{2}u^2 = 0$  on arrive à une contradiction.

13.e) On a  $U'(0) = 0$ ,  $U'$  ne peut s'annuler sur  $]0, +\infty[$ ,  $U(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0$ . Nécessairement  $U'(x) < 0$  sur  $]0, +\infty[$ .

13.f) En prenant la racine carrée de la formule de 13.a) (rappel  $\sqrt{\xi^2} = |\xi|$ ) il vient  $-U'(x) = |U'(x)| = U(x)\sqrt{1 - U(x)}$ .

13.g) Comme le membre de droite de l'égalité dans 13.f) ne peut s'annuler sur  $] \varepsilon, x[$  avec  $\varepsilon > 0$ , il vient

$$-\int_{\varepsilon}^x \frac{U'(y)}{U(y)\sqrt{1 - U(y)}} dy = x - \varepsilon.$$

En effectuant le changement de variable  $t = U(y)$  on a alors

$$-\int_{U(\varepsilon)}^{U(x)} \frac{dt}{t\sqrt{1-t}} = x - \varepsilon.$$

Faire  $\varepsilon \rightarrow 0$  conclut (observer que l'intégrale généralisée converge bien).

13.h) Soit  $\Phi(s) = t$  la fonction réciproque de  $t = \operatorname{ch}^{-2}(s)$ . Par le changement de variable préconisé, vu que  $dt = -\frac{2\operatorname{sh}(s)}{\operatorname{ch}^3(s)}$  et  $\frac{1}{t\sqrt{1-t}} = \frac{\operatorname{ch}^3(s)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(s)-1}}$ , il vient

$$x = \int_{U(x)}^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t}} = \int_{\Phi(U(x))}^0 -2ds = 2\Phi(U(x)).$$

Donc  $U(x) = \text{ch}^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)$ .

13.i) Toutes les solutions sont nécessairement de la forme  $U(x + x_0)$  où  $x_0$  constante réelle. Réciproquement, en dérivant deux fois  $U(x) = \text{ch}^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)$  on vérifie que ces fonctions sont bien solutions.

### Quatrième partie

14) La norme ainsi définie vérifie  $\|\varphi\|_H^2 = \beta(\varphi, \varphi)$  avec

$$\beta(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x)\psi(x) + \varphi'(x)\psi'(x))dx.$$

Soit on vérifie que cette forme bilinéaire symétrique est un produit scalaire, soit on vérifie les trois axiomes d'une norme comme suit. Si  $\|\varphi\|_H = 0$  alors  $\varphi = \varphi' = 0$  sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\varphi$  est nulle. On a pour  $\lambda$  réel  $\|\lambda\varphi\|_H = |\lambda|\|\varphi\|_H$ .

Inégalité triangulaire : rappelons que si  $(a, b)$  et  $(c, d)$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  euclidien, alors

$$((a + c)^2 + (b + d)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

On en déduit que pour tout  $x$

$$\begin{aligned} & (\varphi(x) + \psi(x))^2 + (\varphi'(x) + \psi'(x))^2 \\ & \leq \left( \sqrt{\varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2} + \sqrt{\psi(x)^2 + \psi'(x)^2} \right)^2. \end{aligned}$$

En intégrant en  $x$  il vient, en posant  $A(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2}$  et  $B(x) = \sqrt{\psi(x)^2 + \psi'(x)^2}$ , et en utilisant l'inégalité triangulaire sur  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\|_H^2 & \leq \int_{\mathbb{R}} (A(x) + B(x))^2 dx \\ & \leq \left( \left( \int_{\mathbb{R}} A(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\mathbb{R}} B(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Prendre la racine carrée de cette dernière inégalité conclut.

15.a) On a tout d'abord  $\varphi(x)^2 = 2 \int_{-\infty}^x \varphi(s)\varphi'(s)ds$  en intégrant  $(\varphi^2(x))'$  entre  $-\infty$  et  $x$ . La seconde égalité s'obtient en intégrant  $(\varphi^2(x))'$  entre  $x$  et  $+\infty$ .

15.b) En prenant la moyenne des deux égalités précédentes on a

$$2\varphi(x)^2 = 2 \left| \int_{-\infty}^x \varphi(s)\varphi'(s)ds \right| + 2 \left| \int_x^{+\infty} \varphi(s)\varphi'(s)ds \right|.$$

En majorant le module de l'intégrale par l'intégrale du module et par la relation de Chasles on en déduit

$$2\varphi(x)^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi(s)||\varphi'(s)|ds.$$

On conclut par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation  $2ab \leq a^2 + b^2$  avec  $a = \|\varphi\|_2$  et  $b = \|\varphi'\|_2$ .

15.c) On part de  $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \int_x^y \varphi'(s)ds \right|$ . Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a  $\left| \int_x^y \varphi'(s)ds \right| \leq \left( \int_x^y \varphi'(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{|x - y|}$ .

On conclut par  $\left| \int_x^y \varphi'(s)^2 ds \right| \leq \|\varphi'\|_2^2$ .

16.a) Soit  $u$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  admettant deux dérivées faibles, i.e. deux fonctions  $v$  et  $w$  telles que pour tout  $\varphi$  dans  $C_c^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} w(x)\varphi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx.$$

Alors  $\int_{\mathbb{R}} (v(x) - w(x))\varphi(x)dx = 0$ , i.e.  $v - w$  orthogonal dans  $L^2(\mathbb{R})$  au sous-ensemble dense  $C_c^1(\mathbb{R})$ . Donc  $v = w$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

16.b) L'ensemble  $H$  est un espace de Hilbert par construction (c'est une complété) car il est fermé et sa norme vient d'un produit scalaire. On va établir qu'on peut choisir  $H$  comme l'ensemble

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}); u' \text{ (sens faible)} \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Soit  $(\varphi_n)$  une suite de fonctions  $C^1$  à support compact de Cauchy pour la norme  $H$ . Alors dans  $L^2(\mathbb{R})$  chacune des suites de fonctions  $(\varphi_n)$  et  $(\varphi_n')$  sont de Cauchy. Notons respectivement  $u$  et  $v$  leurs limites dans  $L^2(\mathbb{R})$ . On va maintenant montrer que  $u' = v$ . On part de, pour toute fonction  $\psi$   $C^1$  à support compact

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\psi'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} \varphi_n'(x)\psi(x)dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (\varphi_n(x) - u(x))\psi'(x)dx \right| \leq \|\psi'\|_2 \|\varphi_n - u\|_2$$

tend vers 0. De même  $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n'(x)\psi(x)dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} v(x)\psi(x)dx$ . Par conséquent  $\int_{\mathbb{R}} u(x)\psi'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} v(x)\psi(x)dx$  et  $v = u'$ . Il est aisé de voir en outre que  $(\varphi_n)$  converge vers  $u$  dans  $H$ .

16.c) La fonction  $\tilde{v}$  est une fonction continue en vertu de  $|\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y)| \leq \|v'\|_2 \sqrt{|x - y|}$  par Cauchy-Schwarz. Comme on a  $\tilde{v}' - v' = 0$  il suffit de montrer qu'une fonction  $u$  dans  $L^2_{loc}(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx = 0$  pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  à support compact est constante. Remarquons que si  $\psi$  continue à support compact, alors  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(s)ds$  est à support compact si et seulement si  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$ . Soit  $h$  dans  $\mathbb{R}$ . La fonction  $x \mapsto \psi(x) - \psi(x - h)$  est alors la dérivée d'une fonction  $C^1$  à support compact. On en déduit

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)(\psi(x) - \psi(x - h))dx = \int_{\mathbb{R}} (u(x) - u(x + h))\psi(x)dx = 0. \quad (3.2)$$

Soit  $\theta$  une fonction continue à support compact, positive, quelconque. En approchant la fonction  $x \mapsto (u(x) - u(x + h))\theta(x)$  par une suite de fonctions  $\psi$  de classe  $C^1$  à support compact, on déduit de (3.2) que

$$\int_{\mathbb{R}} (u(x) - u(x + h))^2 \theta(x) dx = 0.$$

Donc  $u(x) = u(x + h)$  presque partout et  $u$  est constante.

16.d) Soit  $\varphi_n$  une suite de fonctions de classe  $C^1$  à support compact qui converge dans  $H$  vers  $v$ . On peut extraire de  $\varphi_n$  une sous-suite qui converge presque partout vers  $v$ . De 15.b) on déduit que la suite  $\varphi_n$  est de Cauchy dans  $CB(\mathbb{R})$  donc convergente vers une limite  $w$ . Par conséquent  $v = w$  presque partout. On a alors par 15.b)

$$2\|v\|_{\infty}^2 = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n\|_{\infty}^2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n\|_H^2 = \|v\|_H^2.$$

Remarquons que nécessairement  $w$  est dans  $E$  par 7.b); donc  $H \subset E$ .

16.e) En utilisant le même argument qu'en 16.d)

$$|v(x) - v(y)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n'\|_2 = \|v'\|_2 \sqrt{|x - y|}.$$

16.f) On a  $H \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ . Par conséquent  $H \subset L^3(\mathbb{R})$  en vertu de  $\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^3 dx \leq \|v\|_2^2 \|v\|_{\infty}$ .

16.g) Vu que  $H \subset L^2(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}) \subset L^4(\mathbb{R})$  aussi on a  $v^2$  est de carré intégrable. Montrons que la dérivée faible de  $v^2$  est  $2vv'$ ; si cela est vrai, alors vu que  $v$  est dans  $L^{\infty}$  et  $v'$  dans  $L^2$  on aura terminé. Soit  $(\varphi_n)$  une suite de fonctions de classe  $C^1$  à support compact qui converge vers  $v$ . Il est aisé de voir que  $\varphi_n^2$  converge dans  $L^2$  vers  $v^2$ . La suite  $2\varphi_n\varphi_n'$  converge dans  $L^2(\mathbb{R})$  vers  $2vv'$ . D'où le résultat.

## Cinquième partie

17) Si  $q$  est identiquement nulle alors  $\lambda = 0$  convient. Si non  $\text{Ker } q$  est un hyperplan fermé de  $H$ . Il s'écrit comme l'orthogonal d'un vecteur  $v_q$  non nul. De même  $\text{Ker } \ell$  est l'orthogonal de  $v_\ell$ . Vu que  $(\text{Ker } q)^\perp \subset (\text{Ker } \ell)^\perp$  alors il existe  $\lambda$  réel tel que  $v_q = \lambda v_\ell$ . Comme  $\ell(v) = (v_\ell, v)_H$  et  $q(v) = (v_q, v)_H$  alors  $q = \lambda \ell$ .

18) On a  $1 = \int_{\mathbb{R}} v(x)^3 dx \leq \|v\|_\infty \|v\|_2^2$ . Donc par 16.d) on a  $\sqrt{2} \leq \|v\|_H^3$  pour tout  $v$  dans  $\mathcal{V}$ . D'où en passant à l'infimum  $\nu \geq 2^{\frac{1}{3}}$ .

19.a) Nous avons vu en 16.g) que si  $v$  est dans  $H$ , alors  $v^2$  aussi. On en déduit que le produit de deux fonctions de  $H$  est dans  $H$  en vertu de  $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ . L'ensemble  $H$  étant stable par multiplication il vient alors pour  $v, h$  dans  $H$  on a  $(v+h)^3 = v^3 + 3v^2h + 3vh^2 + h^3$ . En intégrant cette identité on en déduit

$$V(v+h) = V(v) + 3 \int_{\mathbb{R}} v(x)^2 h(x) dx + \int_{\mathbb{R}} (3v(x)h(x)^2 + h(x)^3) dx.$$

On a  $|\int_{\mathbb{R}} (3v(x)h(x)^2 + h(x)^3) dx| \leq \|h\|_2^2 (3\|v\|_\infty + \|h\|_\infty) = O(\|h\|_H^2)$ . On en déduit que  $V$  différentiable sur  $H$  et  $DV(v)h = 3 \int_{\mathbb{R}} v(x)^2 h(x) dx$ .

Remarque : la fonctionnelle  $J$  quadratique est elle aussi différentiable et  $DJ(v)(h) = 2(v, h)_H$ .

19.b) L'application  $t \mapsto V(\gamma(t))$  est de classe  $C^1$  au voisinage de  $t = 0$  comme composée d'applications de classe  $C^1$ . Elle est identiquement nulle. Par conséquent sa dérivée qui s'écrit  $DV(\gamma(0))\gamma'(0)$  est nulle.

19.c) La fonction  $u = \gamma(0)$  réalisant le minimum sur  $\mathcal{V}$  on écrit  $J(u) \leq J(\gamma(t))$  pour  $t$  au voisinage de 0. Par un développement limité de  $t \mapsto J(\gamma(t))$  (la fonction  $J$  quadratique est régulière) il vient

$$J(u) \leq J(\gamma(t)) = J(u) + tDJ(\gamma(0))\gamma'(0) + o(t).$$

En prenant  $t > 0$  et en laissant  $t$  tendre vers 0 on obtient  $DJ(u)\gamma'(0) \geq 0$ . En prenant  $t < 0$  et en laissant  $t$  tendre vers 0 on obtient  $DJ(u)\gamma'(0) \leq 0$ .

19.d) Les questions 19.b) et 19.c) montrent que pour tout vecteur  $\gamma'(0)$  dans  $\text{Ker } DV(u)$  (l'hyperplan tangent en  $u$  à  $\mathcal{V}$ ), alors  $\gamma'(0) \in \text{Ker } DJ(u)$ . D'où le résultat.

19.e) Un vecteur  $v$  dans  $H$  appartient à  $\text{Ker } DJ(u)$  si et seulement si

$$DJ(u)v = 2 \int_{\mathbb{R}} (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) dx = 0.$$

En appliquant les résultats de 17), 19.a) et 19.d) il vient alors : il existe  $\lambda$  réel tel que pour tout  $v$  dans  $H$

$$2 \int_{\mathbb{R}} (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) dx = 3\lambda \int_{\mathbb{R}} v(x)^2 h(x) dx.$$

On en déduit que  $u'$  admet une dérivée faible qui vérifie  $-2u'' + 2u = 3\lambda u^2$ .

19.f) De la question précédente on déduit  $-(\lambda u)'' + \lambda u = \frac{3}{2}(\lambda u)^2$ , d'où le résultat.

20.a) Soit  $u$  qui réalise le minimum de  $V$  sur  $\mathcal{V}$ . Alors  $u$  est non nul car  $\nu > 0$  d'après 18) donc  $u$  est dans  $\mathcal{N}$ . Donc  $\nu \geq \mu$ . Réciproquement soit une suite de  $v_k$  dans  $\mathcal{N}$ ,  $k \geq 1$  qui vérifie

$$\mu \leq \|v_k\|_H^2 < \mu + \frac{1}{k}.$$

Observons que  $\int_{\mathbb{R}} v_k(x)^3 dx = \|v_k\|_H^2 \neq 0$ , car  $v_k$  non nul. Soit

$$w_k = \left( \int_{\mathbb{R}} v_k(x)^3 dx \right)^{-\frac{1}{3}} v_k.$$

Alors  $w_k$  appartient à  $\mathcal{V}$ . Donc

$$\nu \leq \|w_k\|_H^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} v_k(x)^3 dx \right)^{-\frac{2}{3}} \|v_k\|_H^2 = \nu^{\frac{2}{3}} \|v_k\|_H^{\frac{2}{3}} = \nu^{\frac{2}{3}} \mu^{\frac{1}{3}} + o(1).$$

Faire  $k$  tend vers l'infini donne  $\nu \leq \mu$ .

20.b) Soit  $v$  dans  $\mathcal{N}$  tel que  $\|v\|_H^2 = \mu = \nu$ . Vu que  $\nu \int_{\mathbb{R}} v(x)^3 dx = \nu$  alors  $v$  est aussi dans  $\mathcal{V}$ .

### Sixième partie

21) L'ensemble  $\mathcal{N}$  et la norme  $\|\cdot\|_H$  étant invariants par translation  $h \mapsto v(\cdot + h)$  sur les fonctions, la suite  $w_n$  définie par  $w_n(x) = v_n(x + x_n)$  est aussi une suite minimisante.

22) On a

$$0 < \nu \leq \|w_n\|_H^2 = \nu \int_{\mathbb{R}} w_n(x)^3 dx \leq \nu \|w_n\|_{\infty} \|w_n\|_2^2 \leq \nu |w_n(0)| \|w_n\|_H^2.$$

Donc  $\nu |w_n(0)| \geq 1$  en divisant par  $\|w_n\|_H^2$  qui est non nul.

23.a) Par construction la suite minimisante  $w_n$  est bornée dans  $H$ . Par les questions 16.d) et 16.e) la suite  $w_n$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  et équicontinue. Par le théorème d'Ascoli, on peut extraire de cette suite (via le procédé diagonal de Cantor) une sous-suite toujours notée  $w_n$  qui converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$  vers une limite  $u$ . Il vient de la question précédente  $1 \leq \nu |u(0)|$ .

23.b) On applique le théorème rappelé en page deux de l'énoncé à la suite définie en 23.a).

23.c) Par définition de la convergence faible

$$\|u\|_H^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u, u_n)_H.$$

Par Cauchy-Schwarz  $(u, u_n)_H \leq \|u\|_H \|u_n\|_H$ . Donc

$$\|u\|_H \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_H = \sqrt{\nu}.$$

24.a) Vu que  $\mathcal{N} \subset \{v \in H; v \neq 0; N(v) \leq 0\}$  alors

$$\nu_- = \inf\{\|v\|_H^2; v \in H; v \neq 0; N(v) \leq 0\} \leq \nu.$$

Inversement soit  $v_k$  une suite minimisante dans  $\{v \in H; v \neq 0; N(v) \leq 0\}$  tel que

$$\nu_- \leq \|v_k\|_H^2 < \nu_- + o(1).$$

Supposons  $N(v_k) < 0$  sauf pour un nombre fini de  $k$  sinon la démonstration est terminée. Regardons la fonction  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(t) = N(tv_k)$ . On a  $\varphi(1) < 0$ . Au voisinage de 0,  $\varphi(t) \sim t^2 \|v_k\|_H^2 > 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe alors  $t_k \in ]0, 1[$  tel que  $N(t_k v_k) = 0$ . On a  $\nu \leq \|t_k v_k\|_H^2 \leq \|v_k\|_H^2 = \nu_- + o(1)$ . On conclut par passage à la limite.

24.b) Si  $N(u) \leq 0$  alors  $\|u\|_H^2 = \nu_- = \nu$  et  $u$  non nul réalise l'infimum.

25) Par définition de la convergence faible

$$\|u_n - u\|_H^2 - \|u_n\|_H^2 + \|u\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 - 2(u_n, u)_H = o(1).$$

26) En développant le cube de la différence on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (u_n(x) - u(x))^3 dx - \int_{\mathbb{R}} u_n(x)^3 dx + \int_{\mathbb{R}} u(x)^3 dx = \\ & = 3 \int_{\mathbb{R}} u_n(x)u(x)(u_n(x) - u(x)) dx. \end{aligned}$$

Fixons  $M$  positif assez grand. D'une part, vu que la suite  $u_n$  est bornée dans  $H$

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|>M} u_n(x)u(x)(u_n(x) - u(x)) dx \right| & \leq \sup_{|x|>M} |u(x)| (\|u_n\|_2 \|u - u_n\|_2) \\ & \leq C \sup_{|x|>M} |u(x)|. \end{aligned}$$

D'autre part par convergence uniforme sur le compact  $[-M, M]$  on a  $|\int_{|x|\leq M} u_n(x)u(x)(u_n(x) - u(x)) dx| = o(1)$ . Par conséquent

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| 3 \int_{\mathbb{R}} u_n(x)u(x)(u_n(x) - u(x)) dx \right| \leq 3C \sup_{|x|>M} |u(x)|.$$

Faire  $M \rightarrow +\infty$  conclut car  $u$  est évanescence.

27) Par le résultat de 25) et 26), on a  $N(u_n - u) - N(u_n) + N(u) = o(1)$ . On sait que  $N(u_n) = 0$ . On en déduit que  $N(u_n - u) < 0$  si  $N(u) > 0$  et  $n$  assez grand.

28) On va montrer que  $N(u - u_n) < 0$  n'est pas possible. Si cela était vrai pas le résultat de la question 24) on aurait

$$\nu \leq \|u - u_n\|_H^2 = \|u_n\|_H^2 - 2(u, u_n)_H + \|u\|_H^2 = \|u_n\|_H^2 - \|u\|_H^2 + o(1),$$

par convergence faible. Faire  $n$  tend vers l'infini donne  $\|u\|_H^2 \leq 0$  contredit  $u(0) \neq 0$ . Donc  $N(u) > 0$  ne peut être vérifiée et  $u$  réalise le minimum par 24.b)