Chapitre 3

Rapport sur les épreuves écrites

L'arrêté définissant le concours dispose que les épreuves écrites « ont pour objectif d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques et la capacité de les mobiliser pour étudier des situations, ainsi que la solidité, sur le plan scientifique, des acquis professionnels ».

Aussi, une bonne connaissance d'un minimum d'outils théoriques est-elle indispensable à la réussite de ces épreuves, ce qui suppose un travail de préparation visant la maîtrise des théorèmes fondamentaux et un entraînement à la résolution de problèmes afin d'acquérir de bons réflexes intellectuels.

Les correcteurs sont particulièrement attentifs à la clarté des raisonnements et à la précision des justifications. Lorsqu'un résultat est utilisé (théorème, propriété, etc.), il est important d'énoncer clairement les hypothèses à vérifier et la conclusion désirée. Ceci est d'autant plus vrai lorsque le candidat n'arrive pas à vérifier lesdites hypothèses car le correcteur peut au moins valoriser ses connaissances et sa capacité à reconnaître une situation. De manière générale, il est indispensable de justifier l'existence des objets mathématiques avant de les manipuler, comme par exemple les intégrales, les sommes de séries, les limites…

Il est attendu dans la rédaction les qualités exigibles d'un professeur de mathématiques, à savoir :

- la rigueur de l'argumentation. Par exemple, choisir de façon pertinente les articles utilisés (singulier ou pluriel, défini ou indéfini) ; identifier clairement le théorème invoqué ou le résultat d'une question précédente utilisé (des arguments comme « d'après le cours » ou « vu ce qui précède » sont trop vagues pour être suffisants) et en vérifier les hypothèses ; ne pas confondre une inégalité stricte avec une inégalité large, une inclusion avec une égalité, une bijection avec une injection, etc. ; vérifier, avant d'inverser un nombre ou une matrice, que cela est possible ;
- la maîtrise des techniques usuelles de démonstration : raisonnement par équivalence, raisonnement par analyse-synthèse, démonstration par récurrence, par l'absurde, par contraposée etc. ;
- la clarté de l'expression, la lisibilité de la présentation ainsi qu'une certaine attention à l'orthographe.

Il est aussi apprécié que les candidats expliquent leur démarche, concluent les questions et accompagnent, si c'est pertinent, leurs démonstrations de figures, schémas ou autres illustrations géométriques.

Le jury regrette unanimement un manque de rigueur et de logique dans les raisonnements qui prend des proportions inquiétantes : confusions entre implication et équivalence, condition nécessaire et condition suffisante (confusion entre « il faut » et « il suffit »), quantificateurs erronés ou absents, connaissance très approximative des définitions (limites, continuité, sup, inf etc.) et des théorèmes. Toutes ces insuffisances sont sévèrement sanctionnées tant il est essentiel qu'un professeur de mathématiques maîtrise ces fondamentaux pour dispenser un enseignement de qualité. Le jury tient à appeler l'attention des candidats sur la nécessité de fournir un travail important dans ce sens.

3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_interne/21/3/s2018_agreg_interne_math_1_887213.pdf

3.1.1 Présentation du sujet

L'objectif principal est l'établissement de l'assertion :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbf{R}_+.$$

La partie I permet d'établir quelques résultats élémentaires utiles pour la suite du problème. On reformule également le problème initial en montrant qu'il est équivalent à un problème plus simple en apparence. Dans la partie II, on établit le résultat dans un cas particulier. La partie III introduit le résultant de deux polynômes ainsi que le discriminant d'un polynôme, et établit quelques propriétés élémentaires sur le résultant, ainsi que le fait que le discriminant permet de caractériser les polynômes complexes scindés à racines simples. La partie IV, plus difficile, établit certaines propriétés des polynômes à plusieurs indéterminées et démontre l'assertion souhaitée à l'aide d'arguments de densité et de continuité. La partie V propose une autre manière d'introduire le résultant (à un coefficient multiplicatif non nul près) comme déterminant d'un certain endomorphisme, ce qui donne l'occasion de manipuler les espaces vectoriels quotients. Le sujet propose enfin une démonstration directe purement algébrique de l'assertion à établir.

3.1.2 Remarques générales

Le sujet couvre une large partie du programme d'algèbre et de topologie. Sa longueur est relativement raisonnable (notons que la meilleure copie a répondu à presque toutes les questions) et sa difficulté très progressive. Les questions de la partie I ont été traitées par la très grande majorité des candidats. Certaines questions, pourtant très abordables avec les connaissances du programme, se sont avérées très discriminantes. Le jury constate que beaucoup de candidats maîtrisent mal la logique et plus particulièrement la manipulation et la compréhension des assertions mathématiques quantifiées. Ces compétences sont pourtant essentielles à la pratique des mathématiques.

Quelques écueils à éviter et fréquemment rencontrés dans les copies :

- il convient de clairement répondre à la question posée, ce qui n'est pas toujours évident à la lecture de certaines réponses des candidats ;
- il ne faut pas ignorer la présence des quantificateurs dans les assertions à montrer ;
- on ne peut pas se contenter d'affirmer un résultat sans justification ;
- beaucoup de raisonnements par récurrence ne sont pas rédigés correctement, en particulier l'hérédité qui, rappelons-le, consiste à montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$;
- le symbole $\Rightarrow$ n'est pas une abréviation de « donc » ;

- le symbole $\iff$ est souvent utilisé de manière abusive et mal compris. $P \iff Q$ n'implique pas que P est vraie ou que Q est vraie ;
- beaucoup de confusions sur la nature des objets : un polynôme n'est pas une équation (à ce propos, signalons que l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbf{C}$, ne caractérise pas le polynôme P) ; une fonction n'est pas un nombre ; une matrice n'a pas de matrice dans une base ; dans $\mathbf{K}[X]$, X est un polynôme (on ne peut donc par exemple pas « poser $X = 1$ ») ; parler de la dimension d'une famille de vecteurs est incorrect, etc. ;
- il ne faut pas manipuler des objets comme l'inverse d'une matrice, la limite d'une suite, ... sans avoir préalablement justifié leur existence ;
- il faut être précis dans les justifications. Par exemple, il est insuffisant d'écrire : « f est injective et on est en dimension finie, donc f est bijective » si l'on ne signale pas que f est un endomorphisme ou que les dimensions de l'espace vectoriel de départ et d'arrivée sont égales ;
- un polynôme réel n'a pas nécessairement ses racines dans $\mathbf{R}$, même s'il est scindé à racines simples dans $\mathbf{C}$, comme le montre l'exemple de $X^2 + 1$;
- attention au fait qu'une matrice diagonalisable n'est pas « égale à une matrice diagonale dans une certaine base » mais *a priori* seulement semblable à une telle matrice diagonale ;
- beaucoup de candidats vérifient inutilement que l'image du vecteur nul est nul pour prouver qu'une application est linéaire ;
- on constate, dans beaucoup de copies, un certain flou au niveau des inégalités : les inégalités larges et strictes sont utilisées indifféremment ; certaines copies affirment que $\lambda > 0$ est équivalent à $\lambda \in \mathbf{R}_+$, que la simple croissance d'une fonction suffit à maintenir des inégalités strictes, etc. ;
- $a \neq b \neq c$ n'a pas de sens, puisque $\neq$ n'est pas une relation transitive ;
- il n'est pas absurde, pour un polynôme, de s'annuler une infinité de fois, sauf à préciser que ce polynôme n'est pas nul ;
- la malhonnêteté manifeste de certaines démonstrations est inacceptable de la part d'enseignants et est sévèrement sanctionnée par les correcteurs ;
- il est inadmissible que certaines copies soient très difficiles à lire du fait d'une présentation négligée ou d'une écriture illisible.

Conseils

- Penser à introduire les variables pour démontrer une formule quantifiée universellement (par exemple pour la linéarité d'une application).
- Lorsqu'il s'agit de démontrer une équivalence, énoncer clairement ce qui est supposé et ne pas oublier de conclure. Le correcteur ne doit pas avoir à se poser de questions sur l'hypothèse de départ.
- Se contenter de dire qu'une propriété est évidente, immédiate ou triviale en début d'épreuve ne rapporte aucun point. L'épreuve n'est pas une course de vitesse ; chaque question traitée doit l'être avec soin.
- Bien mettre des connecteurs logiques entre les lignes de calcul.
- Éviter de mélanger les phrases en français et les symboles mathématiques, ces derniers ne devant pas servir d'abréviation.
- Il est inutile de copier l'énoncé de chaque question.
- Il est en revanche très utile de bien le lire (par exemple, dans la question 15, le polynôme P est supposé de degré 2, pas dans la question 16 ; ou encore, la question 8 fait *l'hypothèse* que la valeur propre λ est réelle).
- Les candidats devraient prêter davantage attention à la précision du vocabulaire employé : les polynômes caractéristiques ne sont pas diagonalisables, les matrices n'ont pas de solutions, une

suite de matrices n'est pas un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ mais de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\mathbf{N}}$, les polynômes n'ont pas de solutions, le degré d'un couple de polynômes n'a pas de sens, la dimension d'un polynôme non plus, antécédent et image réciproque ne sont pas synonymes, etc.
- Écrire des phrases mathématiques ne dispense pas d'une orthographe correcte : « je choisit », « j'admet » , « j'en déduit », « on conclu que » sont très mal venus dans une copie d'agrégation.

3.1.3 Statistiques de réussite

Dans l'ensemble les candidats admissibles ont traité les trois premières parties, certains ayant rebondi sur la partie VI qui était indépendante. Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions (chaque barre correspond à un item de correction).

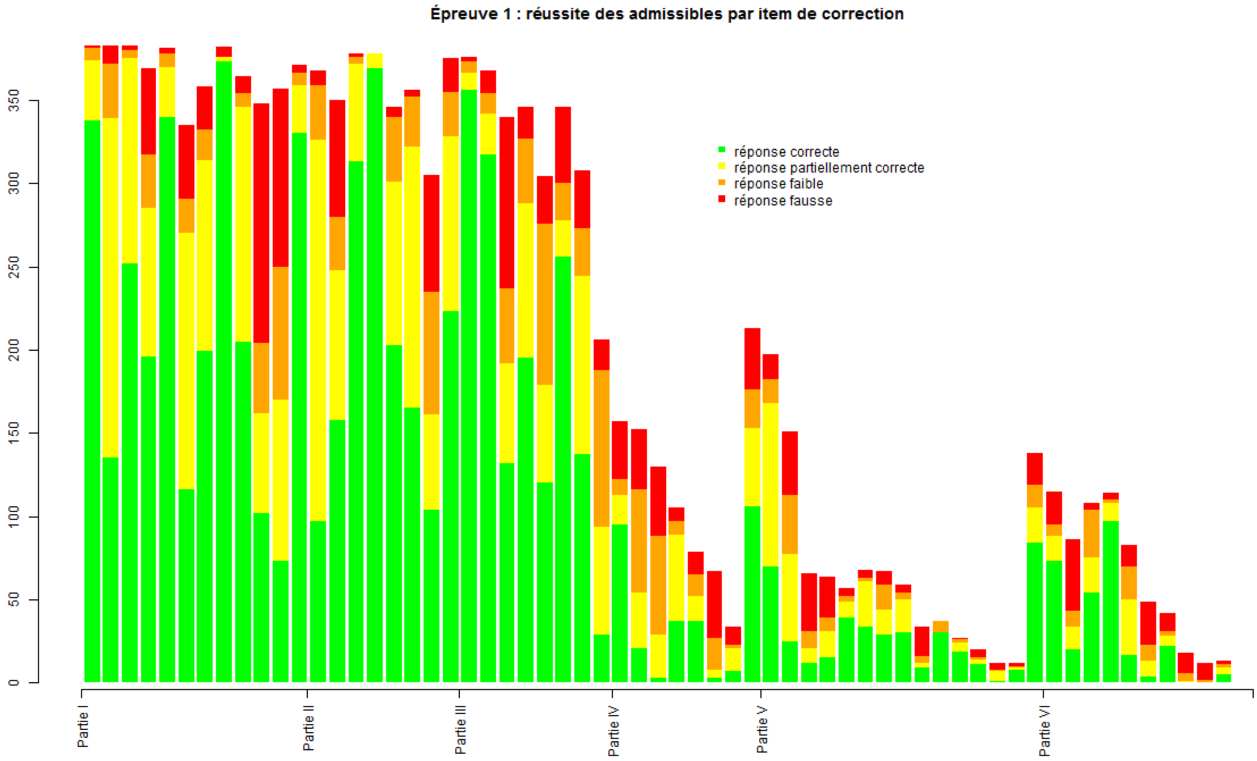

FIGURE 3.1 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le nombre de candidats admissibles ayant fourni une bonne réponse, la zone jaune représente ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone orange ceux dont la réponse est entachée d'erreurs, la zone rouge les réponses fausses

3.1.4 Commentaires par question

Partie I

1. Cette question a été globalement correctement traitée. Toutefois, certains candidats pensent que $\forall z \in \mathbf{C},\ |z| > 0$.
2. **(a)** De nombreux candidats ignorent comment s'exprime le produit d'une matrice par un vecteur. Il est inutile de redémontrer que la somme (ou le produit) des conjugués de deux nombres complexes est le conjugué de la somme (ou du produit).

(b) Les réponses sont souvent partielles. En particulier, les candidats doivent faire la différence entre la structure d'espace vectoriel et celle d'algèbre. De nombreux candidats oublient de montrer que l'image de I_n est bien I_n. Très peu pensent à utiliser que toute involution est bijective et montrent la bijectivité en montrant l'injectivité et la surjectivité, ce qui leur fait perdre du temps. Certains candidats ne savent pas ce qu'est un automorphisme et interprètent ce mot comme suit : « L'application f : ... est bien un automorphisme, c'est-à-dire un morphisme de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même. »

(c) Beaucoup de candidats ignorent la définition du déterminant sous la forme de : $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n,\sigma(n)}$, ce qui rend la question difficile. Une démonstration par récurrence à l'aide d'un développement par ligne/colonne est acceptable si le développement est correctement écrit (en tenant compte du fait qu'un cofacteur n'est pas un mineur). Cependant cette méthode était bien plus longue que l'utilisation directe de la formule du déterminant. À propos de la récurrence, certains candidats commencent par $n = 2$ alors que $n = 1$ est si simple.

(d) Certains candidats confondent inégalités larges et strictes.

3. (a) Certains candidats pensent qu'une matrice non nulle a nécessairement une valeur propre non nulle et oublient de traiter le cas des matrices nilpotentes, pour lesquelles : $\min\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}\}$ n'existe pas. Par ailleurs, on constate que certains candidats, voulant raisonner par l'absurde, ne savent pas écrire la négation de la propriété demandée.

(b) Beaucoup de candidats ignorent la définition d'une partie dense d'un espace vectoriel normé.

La plupart omettent de parler de norme. Rappeler, dans cette question qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes était attendu.

4. (a) Quelques candidats oublient que le produit matriciel n'est pas commutatif.

(b) Peu de candidats pensent à justifier que $\overline{A}$ est inversible et à dire ce que vaut son inverse. Nous rappelons que, si $n \geqslant 2$, la propriété :
$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2,\ \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ est fausse, tout comme les assertions :

$$\forall (A,B,C,D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^4,\ \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(D) - \det(C)\det(B)$$

et

$$\forall (A,B,C,D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^4,\ \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - BC)$$

5. On voit ici les difficultés que rencontrent les candidats avec la logique. L'équivalence entre ces deux formules quantifiées universellement est très mal gérée, par défaut de compréhension ou de maîtrise des quantificateurs.

L'utilisation de la question précédente n'est pas claire, beaucoup de candidats ont tendance à supposer que toutes les matrices sont inversibles. Des passages à la limite non justifiés (notamment l'existence de la limite) donnent des résultats incohérents (si $(A_p)_{(p\in\mathbf{N})}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers A non inversible, quelle est la limite de $\left(A_p{}^{-1}\right)_{(p\in\mathbf{N})}$) ?

Le raisonnement de l'implication directe et celui de la réciproque sont de nature différente, et il est de ce fait maladroit de chercher à résoudre cette question par équivalence.

Partie II

6. (a) Certains candidats pensent qu'avoir les mêmes valeurs propres est suffisant pour que deux matrices soient semblables (prendre le cas d'une matrice nilpotent $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non nulle et la matrice nulle pour voir que cela est faux).

Attention, le déterminant n'est pas une application linéaire.

(b) Peu de démonstrations soignées sur le fait que l'application qui, à une matrice, associe son polynôme caractéristique est continue. Il est nécessaire de donner un argument pour justifier la continuité du déterminant. Par ailleurs, il convient d'être attentif à l'espace d'arrivée, car si on prend $\mathbf{C}[X]$, le résultat dépend *a priori* du choix de la norme (on n'est pas en dimension finie). Il convient de faire attention à la nature des objets : un polynôme n'est pas un nombre complexe.

(c) Si pour toute racine a d'un polynôme complexe P, $\overline{a}$ est racine de P, ce n'est pas suffisant pour dire que P est un polynôme réel (prendre par exemple $P = (X^2+1)(X-i)$). Il faut préciser que les racines sont de même multiplicité et ne pas oublier le coefficient dominant.

Par ailleurs, si on montre que $\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) = \overline{P(x)}$, il faut bien préciser que ces deux polynômes coïncident sur un ensemble infini pour conclure que $P = \overline{P}$.

Il existe des polynômes complexes pour lesquels $\overline{\lambda}$ n'est pas racine, même si λ l'est.

7. Le fait qu'une matrice donnée soit diagonalisable ne dépend pas du choix d'une base.

Pour justifier que $C\overline{C}$ est diagonalisable, de nombreux candidats rajoutent à l'argument « polynôme caractéristique scindé » l'argument « polynôme caractéristique réel ».

Le fait que le polynôme caractéristique soit scindé à racines simples n'est pas une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

8. (a) Question généralement bien traitée.

(b) Les candidats confondent très souvent vecteur propre et vecteur appartenant au sous-espace propre (il ne faut pas oublier de signaler que $v \neq 0$).

Pour la majorité des candidats, la colinéarité de deux vecteurs u et v équivaut au fait qu'il existe un scalaire λ vérifiant $v = \lambda u$, ce qui est faux (prendre par exemple $u = 0$ et $v \neq 0$)).

Par ailleurs, pour pouvoir affirmer que : si $C\overline{v}$ et v sont des vecteurs propres de $C\overline{C}$ associés à la valeur propre λ alors ces deux vecteurs sont colinéaires, il faut préciser que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est de dimension un. Ne parler de vecteur propre que si on s'est assuré que le vecteur est non nul.

9. Attention à la logique. Les questions précédentes montrent que les valeurs propres réelles sont positives. Il est tout à fait possible d'avoir des valeurs propres complexes.

Par ailleurs, pour dire que si λ est valeur propre de $C\overline{C}$ alors $\overline{\lambda}$ l'est aussi, il faut rappeler que le polynôme caractéristique est réel.

Partie III

10. Cette question est souvent mal traitée parce que beaucoup de candidats ignorent la définition des lois sur un espace vectoriel produit.

Les candidats se contentant de dire que « $\mathscr{B}$ est clairement libre et génératrice » n'ont pas obtenu de points.

11. Beaucoup de candidats utilisent les notations peu judicieuses P et P' pour désigner deux polynômes quelconques (penser que P' désigne souvent la dérivée formelle de P).

Pour montrer que φ est une application linéaire, il n'est pas nécessaire de montrer que $\varphi(0) = 0$, cela découle de la définition d'une application linéaire.

12. Question généralement bien traitée, même si beaucoup de candidats ne connaissent pas la définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases. Attention cependant à ne pas mettre des polynômes comme coefficients matriciels.

13. **(a)** Dans l'utilisation du théorème de Bézout, certains évoquent l'unicité de (U, V) tel que $PU + QV = 1$, lorsque P et Q sont premiers entre eux. Ce dernier théorème n'assure que l'existence de U et V, il n'y a pas unicité sauf à ajouter une condition sur les degrés.

Les candidats se contentant de dire que $PU + QV = 0$ implique $U = V = 0$ car P et Q sont premiers entre eux n'ont pas obtenu de points.

(b) Les candidats affirmant que φ est injective donc bijective car la dimension est finie n'ont pas obtenu la totalité des points. Il fallait bien préciser que les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée de φ étaient les mêmes.

14. Certains candidats ont bien démarré la résolution de la question en évoquant que si $D = PGCD(P, Q)$, alors il existe P_1 et Q_1 tels que $P = P_1D$, $Q = Q_1D$ et $\varphi(-Q_1, P_1) = 0$, mais il fallait vérifier (en examinant le degré) que $(-Q_1, P_1)$ était bien dans l'ensemble de définition de φ.

Des candidats pensent répondre à la question en se contentant d'exhiber une valeur particulière du couple (P, Q) pour laquelle l'application n'est pas injective.

On a souvent trouvé citée l'assertion fausse suivante : si P et Q ne sont pas premiers entre eux alors l'un est multiple de l'autre.

15. Lors du calcul explicite d'un déterminant, il est nécessaire d'indiquer les opérations effectuées.

Beaucoup de candidats se trompent sur la matrice de Sylvester, soit au niveau de la taille, soit au niveau de l'ordre des coefficients.

16. Il a été rarement démontré que P et P' sont premiers entre eux si et seulement si P et P' n'ont pas de racine commune en mentionnant le fait que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

Partie IV

17. **(a)** C'est une question classique.

On rappelle que le polynôme nul a effectivement une infinité de racines.

Beaucoup de candidats ont bien établi l'initialisation, mais l'hérédité est moins bien traitée car les démonstrations sont trop vagues. Isoler la dernière variable x_d en écrivant $\sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{k_1,\dots,k_{d-1}} a(k_1,\dots,k_{d-1},k)x_1^{k_1}\dots x_{d-1}^{k_{d-1}}\right)x_d^k = 0$ pour tout $(x_1,\dots,x_d) \in I_1 \times \dots I_d$ n'est pas suffisant pour dire que tous les $a(k_1,\dots,k_{d-1},k)x_1^{k_1}\dots x_{d-1}^{k_{d-1}}$ sont nuls.

Un nombre non négligeable de candidats considèrent, dans l'initialisation, qu'un polynôme d'une variable est nécessairement un monôme.

(b) Question rarement traitée.

18. Question difficile très rarement abordée. Attention cependant à bien noter que les coefficients de l'application $C \mapsto C\overline{C}$ ne sont pas polynomiaux en les coefficients de C, car la conjugaison n'est pas une application polynomiale. Pour avoir un polynôme, on pouvait considérer cette application comme polynomiale sur les parties réelles et imaginaires des coefficients de C.

19. Question bien traitée par la majorité des candidats l'ayant abordée.

20. **(a)** Question bien traitée par ceux qui l'ont abordée.

(b) Question très rarement abordée.

(c) Question très rarement abordée.

Partie V

21. Ne pas oublier d'évoquer le degré du reste pour avoir l'unicité de la division euclidienne .

Le degré de la somme de polynômes est rarement clairement exprimé.

Beaucoup de candidats ont bien montré que rem_D est un projecteur mais, de façon assez surprenante, n'ont pas réussi à en donner les éléments caractéristiques.

Une réponse du type « quo_D et rem_D sont clairement des endomorphismes » ne rapporte aucun point.

22. Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas les structures quotients et pensent en particulier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

Attention, on ne peut pas dire que $(\overline{1}, ..., \overline{X^{r-1}})$ est échelonnée en degré. Ceci n'a pas de sens puisque l'on travaille sur des classes d'équivalence.

23. **(a)** Pour montrer que f est surjective, on ne peut pas se contenter de trouver $\overline{U}$ tel que $f(\overline{U}) = 1$.

(b) Question généralement bien traitée par les candidats l'ayant abordée.

24. **(a)** Le calcul du degré de $Q \times \mathrm{quo}_Q(S)$ est souvent trop rapide.

(b) Répondre $\tilde{f}(U + QV) = \tilde{f}(U) + QV$ n'est pas suffisant.

(c) Question assez rarement traitée correctement alors qu'il suffisait de remarquer que $\mathscr{B}_1$ est échelonnée en degré.

(d) Question très rarement abordée.

25. **(a)** Répondre $\xi(U + X^r V) = \xi(U) + QV$ n'est pas suffisant.

(b) Question généralement bien traitée par les candidats qui l'ont abordée. Attention à ne pas mettre de polynômes dans la matrice.

(c) Question très rarement abordée.

(d) Question très rarement abordée.

26. Question très rarement abordée.

Partie VI

27. **(a)** Beaucoup de candidats affirment que « deux matrices de même déterminant sont semblables ».

Attention, une matrice de passage convenable est $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ et non $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: les matrices de l'énoncé sont des matrices par blocs de taille n.

(b) Remarque analogue à la question précédente.

28. On constate beaucoup d'erreurs dans le calcul du déterminant d'une matrice décomposée en 4 blocs et (plus rarement) avec l'assertion $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $\det(AB) = \det(BA)$ qui devient : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA)$.

29. **(a)** Question assez bien traitée par les candidats l'ayant abordée.

(b) Ne pas confondre $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n}$.

(c) Attention au fait que θ n'est pas $\mathbf{C}$-linéaire. Par ailleurs, contrairement à ce qu'on peut lire dans certaines copies, il existe des nombres complexes non nuls a et b tels que $a^2 + b^2 = 0$.

(d) Question très peu abordée.

30. **(a)** Beaucoup de confusions, déjà notées les années précédentes, entre espace propre et espace caractéristique. La notion de sous-espace caractéristique est toujours aussi mal maîtrisée.

(b) Question très peu abordée.

31. Quelques rares candidats ont abordé cette question avec succès.

3.1.5 Éléments de correction

Cette section a pour objet de proposer aux candidats des pistes de solution pour répondre aux questions du problème. Ces éléments de correction ne préfigurent pas les attentes du jury en matière de rédaction. Les candidats sont invités pour cela à se référer aux conseils donnés dans les sections précédentes et dans les rapports de jury antérieurs.

Partie I

On fixe deux matrices A et B, éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$. $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a}\end{bmatrix}\right) = |a|^2+|b|^2\in\mathbb{R}_+$

2. **a)** Soient $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $v=(v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}\in\mathbb{C}^n$.

$$\overline{Av} = \overline{\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}v_k\right)_{1\leqslant i\leqslant n}} = \left(\overline{\sum_{k=1}^n a_{i,k}v_k}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}}\,\overline{v_k}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} = \overline{A}\overline{v}$$

b) Notons φ l'application de l'énoncé.

- $\triangleright$ $\varphi\circ\varphi=\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, donc φ est involutive et bijective.
- $\triangleright$ $\varphi(I_n)=I_n$.
- $\triangleright$ Soient $(A,B)=\Big((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
  Alors, $\varphi(\lambda A+\mu B)=\left(\overline{\lambda a_{i,j}+\mu b_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \underset{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}{=} \left(\lambda\overline{a_{i,j}}+\mu\overline{b_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \lambda\varphi(A)+\mu\varphi(B)$.
- $\triangleright$ Soit $(A,B)=\Big((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$.

$$\varphi(AB)=\left(\overline{\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}}\,\overline{b_{k,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \varphi(A)\varphi(B)$$

c) Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\overline{\det(A)} = \overline{\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^n \overline{a_{\sigma(j),j}} = \det\left(\overline{A}\right)$$

d) Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors, $\det(A)\neq 0$. Ainsi,

$$\det\left(A\overline{A}\right)=\det(A)\det\left(\overline{A}\right)=\det(A)\overline{\det(A)}=|\det(A)|^2>0$$

3. **a)** Il suffit de choisir $\eta:=\min\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\setminus\{0\}}|\lambda|$ où $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A *si A admet au moins une valeur propre non nulle* et $\eta:=2018$ sinon.

b) Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\eta>0$ donné par la question (a). Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On choisit la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \|A\|:=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$$

On fixe $k_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{k_0}<\eta$ (possible car $\dfrac{1}{k}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$). Alors,

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \left\|\left(A-\frac{1}{k_0+k}I_n\right)-A\right\| = \left\|-\frac{1}{k_0+k}I_n\right\| = \frac{1}{k_0+k}\quad\text{et}\quad A-\frac{1}{k_0+k}I_n\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Donc,

$$\left\|\left(A-\frac{1}{k_0+k}I_n\right)-A\right\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Ainsi, $\left(A-\dfrac{1}{k_0+k}I_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers A.

4. **a)**

$$\begin{bmatrix} I_n & 0\\ \overline{B}A^{-1} & I_n\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} A & B\\ -\overline{B} & \overline{A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B\\ 0 & \overline{B}A^{-1}B+\overline{A}\end{bmatrix}$$

b) $\det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix}\right) = 1$, et $\overline{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puisque $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)} \neq 0$, donc

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(\overline{B}A^{-1}B + \overline{A}) \\ &= \det(A)\det\left(\overline{A}\left(\overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B + I_n\right)\right) \\ &= |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})\end{aligned}$$

où on a posé $C := \overline{A}^{-1}\overline{B}$.

5. $\boxed{(1) \implies (2)}$ Supposons (1) vraie. Soit $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (il est important d'introduire C en premier pour s'assurer que C est quelconque)

Posons $A := I_n$ et $B := \overline{C}$. Alors, A est inversible et $C = \overline{A}^{-1}\overline{B}$. Donc, d'après 4.b,

$$\det(I_n + C\overline{C}) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) = \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$$

d'après l'hypothèse.

$\boxed{(2) \implies (1)}$ Supposons (2) vraie. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. On conserve la norme choisie précédemment.

- ▷ Supposons d'abord A inversible. Alors, en posant $C := \overline{A}^{-1}\overline{B}$, on a

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$$

  d'après l'hypothèse.
- ▷ Si A n'est pas inversible, on introduit une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers A. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det\left(\begin{bmatrix} A_k & B \\ -\overline{B} & \overline{A_k} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$.

  On conclut par passage à la limite, en utilisant la continuité du déterminant, de la conjugaison et le fait que $\mathbb{R}_+$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

Partie II

6. **a)** $AB = A\,(BA)\,A^{-1}$. Donc, AB et BA sont semblables et $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

b) On considère une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers A.
D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi_{A_kB} = \chi_{BA_k}$.
Par continuité du produit matriciel (bilinéaire en dimension finie), $A_kB \xrightarrow[k\to\infty]{} AB$ et $BA_k \xrightarrow[k\to\infty]{} BA$.
Par ailleurs, la fonction $\chi : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array}$ est continue :
En effet, on pose, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_M =: \sum_{k=0}^{n} a_k(M)X^k$ et on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}_n[X]$ de la norme du max des modules des coefficients (encore une fois, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Comme les $M \mapsto a_k(M)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont polynomiales en les coefficients de la matrice, elles sont continues. D'où la continuité.
Donc, par passage à la limite, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\chi_{C\overline{C}}(\lambda)} = \overline{\det(\lambda I_n - C\overline{C})} = \det\left(\overline{\lambda I_n - C\overline{C}}\right) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \det\left(\lambda I_n - \overline{C}C\right) = \chi_{\overline{C}C}(\lambda) = \chi_{C\overline{C}}(\lambda)$$

Donc, les polynômes $\overline{\chi_{C\overline{C}}}$ et $\chi_{C\overline{C}}$ coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est infini. Donc, $\overline{\chi_{C\overline{C}}} = \chi_{C\overline{C}}$. Ainsi, $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

7. $\chi_{C\overline{C}}$ annule $C\overline{C}$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton et est scindé à racines simples par hypothèse. Donc, $C\overline{C}$ est diagonalisable. Les valeurs propres sont toutes de multiplicité 1, donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

8. **a)** $C\overline{C}v = \lambda v$, donc

$$\overline{C}C\overline{v} = \overline{C\overline{C}v} = \overline{\lambda v} \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda\overline{v}$$

b)

$$C\overline{C}C\overline{v} = C\left(\lambda\overline{v}\right) = \lambda C\overline{v}$$

Donc, $C\overline{v} \in E_\lambda(C\overline{C})$ et $E_\lambda(C\overline{C})$ est une droite vectorielle dirigée par v (car $v \neq 0$, puisque v est un vecteur propre).

Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $C\overline{v} = \mu v$.

c)

$$C(\overline{\mu}\,\overline{v}) = \overline{\mu}C\overline{v} = \overline{\mu}\mu v = |\mu|^2\, v \quad \text{et} \quad C(\overline{\mu}\,\overline{v}) = C(\overline{\mu v}) = C\left(\overline{C\overline{v}}\right) = C\overline{C}v = \lambda v$$

Comme $v \neq 0$, $\lambda = |\mu|^2 \in \mathbb{R}_+$.

9. $\chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme à coefficients réels qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-^*$ d'après la question 8. Il est donc de signe constant sur cet intervalle. Or,

$$\chi_{C\overline{C}}(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^n$$

Ainsi, $\chi_{C\overline{C}}$ a le signe de $(-1)^n$ sur $\mathbb{R}_-^*$. Donc,

$$\det\left(I_n + C\overline{C}\right) = (-1)^n \det\left(-I_n - C\overline{C}\right) = (-1)^n\chi_{C\overline{C}}(-1) \geqslant 0$$

Partie III

10. Soit $(U,V) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} u_k X^k, \sum_{l=0}^{q-1} v_l X^l\right) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$(U,V) = (U,0) + (0,V) = \sum_{k=0}^{r-1} u_k(X^k,0) + \sum_{l=0}^{q-1} v_l(0,X^l) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$$

$\mathscr{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{K}_{r-1}[X]\times\mathbb{K}_{q-1}[X]$ qui comporte $r+q = \dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]\right)$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

11. Soient $((U_1,V_1),(U_2,V_2)) \in \left(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]\right)^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha(U_1,V_1) + \beta(U_2,V_2)\right) &= \varphi(\alpha U_1 + \beta U_2, \alpha V_1 + \beta V_2) = P(\alpha U_1 + \beta U_2) + Q(\alpha V_1 + \beta V_2) \\
&= \alpha(PU_1 + QV_1) + \beta(PU_2 + QV_2) \\
&= \alpha\varphi(U_1,V_1) + \beta\varphi(U_2,V_2)
\end{aligned}$$

12. Pour tout $j \in [\![0, r-1]\!]$, $\varphi(X^j,0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} a_k X^{k+j}$ et pour tout $j \in [\![0, q-1]\!]$, $\varphi(0,X^j) = \displaystyle\sum_{l=0}^{r-1} b_k X^{k+j}$.

Donc,

$$M = \mathrm{Syl}(P,Q)$$

13. **a)** Soit $(U,V) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Donc, $PU + QV = 0$, d'où $-PU = QV$.

Donc, P divise QV. Or, $P \wedge Q = 1$. Donc, P divise V (lemme de Gauss).

Si $V \neq 0$, alors $q - 1 \geqslant \deg(V) \geqslant \deg(P) = q$. Absurde. Donc, $V = 0$. De même, $U = 0$.

Ainsi, φ est injective.

b) φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension. C'est donc un isomorphisme. Ainsi, M est inversible. Donc,

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = \det\left(\mathrm{Syl}(P,Q)\right) = \det(M) \neq 0$$

14. Supposons que φ soit injective. Alors, φ est un isomorphisme. Ainsi, il existe $(U,V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$ vérifiant $PU + QV = 1$. Donc, $P \wedge Q = 1$ d'après le théorème de Bézout. Absurde. Ainsi, φ n'est pas injective. Donc, $\mathrm{Syl}(P,Q)$ n'est pas inversible et son déterminant est nul.

15.

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{2\times 1}{2}}}{a}\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}\left(aX^2+bX+c, 2aX+b\right) = -\frac{1}{a}\begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & 2a & b \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = -\frac{1}{a}\left(c\begin{vmatrix} 2a & b \\ 0 & 2a\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & b \\ a & 2a \end{vmatrix}\right) = b^2 - 4ac$$

16. $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, P et P' sont scindés, donc P et P' sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune, donc si et seulement si toutes les racines de P sont simples.
Donc, P est scindé à racines simples si et seulement si $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,P') \neq 0$ si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

Partie IV

17. **a)** Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, notons $HR(d)$ la propriété à montrer.

Initialisation. Un polynôme à une indéterminée admettant une infinité de racines est nul.

Hérédité. On fixe un entier $d \geqslant 2$. On suppose $HR(d-1)$ vraie.

Soit $P : (x_1,\dots,x_d) \mapsto \displaystyle\sum_{(k_1,\dots,k_d)\in S} a_{(k_1,\dots,k_d)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}$ une fonction polynômiale s'annulant sur un produit $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ de parties infinies de $\mathbb{C}$.
Quitte à ajouter des coefficients nuls, on peut supposer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $S = [\![0,r]\!]^d$.
On fixe $(u_1,u_2,\dots,u_{d-1}) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{d-1}$.
Alors, pour tout $x \in I_d$

$$0 = P(u_1,\dots,u_{d-1},x) = \sum_{k=0}^{r} \underbrace{\left(\sum_{(k_1,\dots,k_{d-1})\in[\![0,r]\!]^{d-1}} a_{(k_1,\dots,k_{d-1},k)} u_1^{k_1}\cdots u_{d-1}^{k_{d-1}}\right)}_{=:P_k(u_1,\dots,u_{d-1})} x^k$$

Ainsi, comme le polynôme à une indéterminée $x \mapsto P(u_1,\dots,u_{d-1},x)$ admet une infinité de racines, ses coefficients sont nuls. Ainsi, pour tout $k \in [\![0,r]\!]$,

$$\forall (u_1,u_2,\dots,u_{d-1}) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{d-1}, P_k(u_1,\dots,u_{d-1}) = 0$$

donc d'après $HR(d-1)$, tous les coefficients de P_k sont nuls.
Ainsi, tous les coefficients de P sont nuls.

b) Z_P est un fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue (car polynômiale) P.
Supposons que $\mathring{Z_P} \neq \varnothing$. Les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut choisir la norme infinie sur $\mathbb{C}^d$. Il existe donc $\eta > 0$ et $(a_1,\dots,a_d) \in \mathbb{C}^d$ tel que

$$D(a_1,\eta) \times D(a_2,\eta) \times \cdots \times D(a_d,\eta) \subset Z_P$$

où $D(x,r)$ désigne le disque fermé de centre $x \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$
Ainsi, P s'annule sur un produit d'ensembles infinis et P est la fonction polynômiale nulle. Absurde.
Donc, Z_P est un fermé d'intérieur vide. Son complémentaire est donc un ouvert dense.

18. De manière analogue, on définit les fonctions polynômiales de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.
On fixe une fonction polynômiale $P : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Si P s'annule sur un produit $I_1 \times I_2 \times \cdots I_d$ de parties infinies de $\mathbb{R}$, alors P est nul, *i.e.* tous ses coefficients sont nuls. Il suffit de reprendre la démonstration de 17.(a) en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
La fonction $P : M \mapsto \Delta\left(\chi_{M\overline{M}}\right)$ est polynômiale en les parties réelles et imaginaires des coefficients de M (on utilise l'identification naturelle entre $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{R}^{2n^2}$), à valeurs réelles (car $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{M\overline{M}} \in$

$\mathbb{R}[X]$) et n'est pas nulle, puisque si l'on pose $A := \operatorname{Diag}(1, 2, \ldots, n)$, $\Delta\left(\chi_{A\overline{A}}\right) = \Delta\left(\prod_{k=1}^{n}(X - k^2)\right) \neq 0$, puisque $\prod_{k=1}^{n}(X - k^2)$ est scindé à racines simples.

Ω est le complémentaire de

$$Z_P := \{C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \Delta(\chi_{C\overline{C}}) = 0\}$$

qui est un fermé comme image réciproque de $\{0\}$ par la fonction continue P.

Si l'on suppose que Z_P est d'intérieur non vide, Z_P contient un produit d'intervalles non réduits à un point (en utilisant à nouveau l'identification précédente) donc infinis. Ainsi, P a tous ces coefficients nuls. Ce qui est absurde, puisque P n'est pas la fonction nulle.

Ainsi, Ω est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

19. Soient $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω qui converge vers C (il en existe par densité).

D'après la question 9., pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det\left(I_n + C_k\overline{C_k}\right) \in \mathbb{R}_+$.

La fonction $M \mapsto \det\left(I_n + M\overline{M}\right)$ est continue (car par exemple, polynômiale en les parties réelles et imaginaires des coefficients de la matrice). Ainsi, comme $\mathbb{R}_+$ est fermé, par passage à la limite, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+$.

20. **a)** Soient $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Le résultat est immédiat si $\lambda = 0$ puisque dans ce cas, $\det\left(\lambda I_n + C\overline{C}\right) = \det\left(C\overline{C}\right) = |\det(C)|^2 \geqslant 0$.

Supposons maintenant que $\lambda > 0$. Alors, d'après la question 19,

$$\det\left(\lambda I_n + C\overline{C}\right) = \lambda^n \det\left(I_n + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}C\right)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}C\right)}\right) \geqslant 0$$

b) A étant à coefficients réels, $\overline{A} = A$, donc $\chi_M = \chi_{A\overline{A}}$. D'après la question précédente,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_-,\ (-1)^n\chi_M(\lambda) \geqslant 0$$

Soient λ_0 une valeur propre réelle strictement négative de M et $m \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.

D'après ce qui précède, χ_M s'annule en λ_0 sans changer de signe (car $\lambda_0 < 0$). Comme il existe $\alpha \neq 0$ vérifiant

$$\chi_M(\lambda) \underset{\lambda\to\lambda_0}{\sim} \alpha\,(\lambda - \lambda_0)^m$$

on en déduit que m est pair.

c) Supposons qu'il existe $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = \exp(U)$.

Si l'on pose $A := \exp\left(\frac{1}{2}U\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $M = A^2$. D'après la question précédente, les valeurs propres strictement négatives sont de multiplicité paire. 0 n'est pas une valeur propre de M puisque M est inversible comme exponentielle d'une matrice. Donc, les valeurs propres réelles négatives de M sont de multiplicité paire.

Partie V

21. On note d le degré de D. Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Alors,

$$\begin{cases} P = \mathrm{quo}_D(P)D + \mathrm{rem}_D(P) \\ \deg(\mathrm{rem}_D(P)) < d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q = \mathrm{quo}_D(Q)D + \mathrm{rem}_D(Q) \\ \deg(\mathrm{rem}_D(Q)) < d \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} \lambda P + \mu Q = (\lambda\mathrm{quo}_D(P) + \mu\mathrm{quo}_D(Q))D + (\lambda\mathrm{rem}_D(P) + \mu\mathrm{rem}_D(Q)) \\ \deg(\lambda\mathrm{rem}_D(P) + \mu\mathrm{rem}_D(Q)) < d \end{cases}$$

Par unicité, on en déduit que

$$\mathrm{quo}_D(\lambda P + \mu Q) = \lambda\mathrm{quo}_D(P) + \mu\mathrm{quo}_D(Q) \quad \text{et} \quad \mathrm{rem}_D(\lambda P + \mu Q) = \lambda\mathrm{rem}_D(P) + \mu\mathrm{rem}_D(Q)$$

Ainsi, quo_D et rem_D sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$.
Par ailleurs,
$$\text{rem}_D(P) = 0 \times D + \text{rem}_D(P) \quad \text{et} \quad \deg(\text{rem}_D(P)) < d$$
Donc, par unicité,
$$\text{quo}_D(\text{rem}_D(P)) = 0 \quad \text{et} \quad \text{rem}_D(\text{rem}_D(P)) = \text{rem}_D(P)$$
Donc, $\text{rem}_D \circ \text{rem}_D = \text{rem}_D$. Ainsi, rem_D est un projecteur.
C'est le projecteur sur $\text{Im}(\text{rem}_D) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$ parallèlement à $\text{Ker}(\text{rem}_D) = D\mathbb{K}[X]$.

22. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quotient. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\overline{P} = \overline{\text{rem}_Q(P)} \in \text{Vect}(\mathscr{B}_0)$, puisque $\deg(\text{rem}_Q(P)) \leqslant \deg(Q) - 1 = r - 1$. Ainsi, $\mathscr{B}_0$ est une famille génératrice.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant r-1} \in \mathbb{K}^r$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \overline{X}^k = \overline{0}$ *i.e.* $\overline{\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k} = \overline{0}$. Ainsi, Q divise $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k$.

Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k \neq 0$, alors $r = \deg(Q) \leqslant \deg\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k\right) \leqslant r - 1$. Absurde. Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k = 0$ et les coefficients sont nuls. Ainsi, $\mathscr{B}_0$ est libre.
Donc, $\mathscr{B}_0$ est une base de E.

23. **a)** $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $P \wedge Q = 1$.
Alors, $\overline{P}$ est inversible d'après le théorème de Bézout.
Ainsi, en posant $g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \overline{U} & \longmapsto & \overline{P}^{-1}\overline{U} \end{array}$, $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$. Donc, f est un automorphisme de E.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f soit un automorphisme de E.
En particulier, f est surjective. Donc, il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\overline{PU} = \overline{1}$. Ainsi, il existe $V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PU = 1 + QV$.
Donc, $P \wedge Q = 1$ d'après le théorème de Bézout.

b) Pour tout $\in [\![0, r-1]\!]$, $f\left(\overline{X}^j\right) = \overline{X^j P} = \overline{QU_j + R_j} = \overline{R_j}$. Donc, $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_0}(f) = \tilde{R}$.

24. **a)** Soit $S \in \mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.
Alors, comme $\deg(\text{rem}_Q(S)) \leqslant r - 1 \leqslant q + r - 1$ et $\deg(S) \leqslant q + r - 1$,
$$\deg\left(\text{quo}_Q(S)\right) + r = \deg\left(\text{quo}_Q(S) Q\right) = \deg\left(S - \text{rem}_Q(S)\right) \leqslant \max\left(\deg(S), \deg(\text{rem}_Q(S))\right) \leqslant q + r - 1$$
Ainsi, $\deg(\text{quo}_Q(S)) \leqslant q - 1$. D'où,
$$\deg\left(P\text{rem}_Q(S) + Q\text{quo}_Q(S)\right) \leqslant \max\left(q + \deg\left(\text{rem}_Q(S)\right), r + \deg\left(\text{quo}_Q(S)\right)\right) \leqslant q + r - 1$$
Ainsi, $\tilde{f}$ est bien définie.

b) Soit $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$. Comme $\deg(U) < \deg(Q)$, $U = \text{rem}_Q(U + QV)$ et $V = \text{quo}_Q(U + QV)$. Ainsi,
$$\tilde{f}\,(U + QV) = PU + QV$$

c) $\mathscr{B}$ est une famille de $q + r = \dim\left(\mathbb{K}_{q+r-1}[X]\right)$ polynômes de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ étagée par les degrés. C'est donc une base de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

d) Pour tout $j \in [\![0, r-1]\!]$, $\tilde{f}\left(X^j\right) = X^j P = QU_j + R_j$ et tout $j \in [\![0, q-1]\!]$, $\tilde{f}\left(X^j Q\right) = X^j Q$.
Donc, en notant $\tilde{U}$ la matrice de $(U_0, U_1, \ldots, U_{r-1})$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_{q-1}[X]$, on a
$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}\left(\tilde{f}\right) = \begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ \tilde{U} & I_q \end{bmatrix}$$
Ainsi,
$$\det\left(\tilde{f}\right) = \det\left(\tilde{R}\right)\det\left(I_q\right) = \det(f)$$

25. **a)** Soit $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.
$$\xi\left(U + X^r V\right) = PU + QV \quad \text{et} \quad \psi(U + X^r V) = U + QV$$

b) Pour tout $j \in [\![0, q+r-1]\!]$,

$$\xi\left(X^j\right) = \begin{cases} X^j P & \text{si } j \leqslant r-1 \\ X^{j-r} Q & \text{si } j \geqslant r \end{cases} \qquad \text{et} \quad \psi\left(X^j\right) = \begin{cases} X^j & \text{si } j \leqslant r-1 \\ X^{j-r} Q & \text{si } j \geqslant r \end{cases}$$

Donc,

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\xi) = \operatorname{Syl}(P, Q)$$

et

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}^{r} & \overbrace{\hphantom{b_0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}}^{q} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & b_0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_r & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_r \end{bmatrix} \end{array}$$

La seconde matrice est triangulaire supérieure.

c) $\det(\psi) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)\right) = b_r^q \neq 0$ (car $\deg(Q) = r$), donc ψ est un automorphisme.

d) Avec les notations précédentes, on a

$$\tilde{f}(U + QV) = PU + QV = \xi\left(U + X^r V\right)$$

donc,

$$\tilde{f}\left(\psi\left(U + X^r V\right)\right) = \xi\left(U + X^r V\right)$$

Ainsi, comme $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ (U, V) & \longmapsto & U + X^r V \end{array}$ est surjective, on en déduit que

$$\tilde{f} \circ \psi = \xi$$

donc

$$\tilde{f} = \xi \circ \psi^{-1}$$

26.

$$\operatorname{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) = \det(\xi) = \det(\tilde{f} \circ \psi) = \det(\tilde{f}) \det(\psi) = \det(f) b_r^q$$

Partie VI

27. **a)** Posons $P := \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$. Alors, P est inversible et $P^{-1} = P$. De plus,

$$P \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$$

b) Posons $Q := \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$. Alors, Q est inversible et $Q^{-1} = Q$. De plus,

$$Q \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} Q^{-1} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$$

28. Posons $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ \overline{B} & \lambda I_n - \overline{A} \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - \overline{A} & \overline{B} \\ -B & \lambda I_n - A \end{bmatrix}\right) \quad \text{d'après la question 27.(a)} \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_n - \overline{A} & -\overline{B} \\ B & \lambda I_n - A \end{bmatrix}\right) \quad \text{d'après la question 27.(b)} \\
&= \det\left(\overline{\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -B \\ \overline{B} & \lambda I_n - \overline{A} \end{bmatrix}}\right) \quad \text{car } \lambda \in \mathbb{R} \\
&= \overline{\chi_M(\lambda)}
\end{aligned}$$

Ainsi, χ_M et $\overline{\chi_M}$ coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{R}$. Donc, $\chi_M = \overline{\chi_M}$ et $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$.

29. **a)** Soient $\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}\right) \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\theta\left(\lambda\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}\right) = \theta\begin{pmatrix} \lambda X_1 + \mu X_2 \\ \lambda Y_1 + \mu Y_2 \end{pmatrix} \underset{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}{=} \begin{pmatrix} -\lambda\overline{Y_1} - \mu\overline{Y_2} \\ \lambda\overline{X_1} + \mu\overline{X_2} \end{pmatrix} = \lambda\,\theta\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + \mu\,\theta\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. Alors, pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$,

$$u\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BY \\ -\overline{B}X + \overline{A}Y \end{pmatrix}$$

donc,

$$u\left(\theta\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = u\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A\overline{Y} + B\overline{X} \\ \overline{B}\,\overline{Y} + \overline{A}\,\overline{X} \end{pmatrix}$$

et

$$\theta\left(u\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \theta\begin{pmatrix} AX + BY \\ -\overline{B}X + \overline{A}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\overline{-\overline{B}X + \overline{A}Y}\right) \\ \overline{AX + BY} \end{pmatrix} = u\left(\theta\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

Donc, u et θ commutent.

b)

$$\theta \circ \theta = -\operatorname{Id}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n}$$

c) Posons $v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \\ (y_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \end{pmatrix}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant

$$\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X - \mu\overline{Y} \\ \lambda Y + \mu\overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $(x_{k_0}, y_{k_0}) \neq (0,0)$, puisque v non nul.
On déduit de l'égalité précédente que

$$\begin{cases} \lambda x_{k_0} - \mu\overline{y_{k_0}} = 0 \\ \lambda y_{k_0} + \mu\overline{x_{k_0}} = 0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène en (λ, μ) de déterminant $|x_{k_0}|^2 + |y_{k_0}|^2 > 0$.
C'est donc un système de Cramer et $(\lambda, \mu) = (0,0)$.
Ainsi, $(v, \theta(v))$ est $\mathbb{C}$-libre.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Alors, comme $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall w \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n,\ \theta(\lambda w) = \overline{\lambda}\theta(w)$,

$$\theta(\alpha v + \beta\theta(v)) = \overline{\alpha}\theta(v) + \overline{\beta}(\theta \circ \theta)(v) = \overline{\alpha}\theta(v) - \overline{\beta}v \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$$

d) Posons $F := E \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$.
F est un sev de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ stable par θ. Comme $v \notin E$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) \not\subset E$. Ainsi, $\dim(F) \leqslant 1$.
Supposons que $\dim(F) = 1$ et fixons $w \in F$ non nul. D'après la question 29.(c), $(w, \theta(w))$ est libre et $\theta(w) \in F$, puisque F est stable par θ. Absurde.
Donc $\dim(F) = 0$ et $E \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}$.

30. a) Posons $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. Comme $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{\lambda}$ est une racine de χ_M de même multiplicité que λ et $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M. Notons m la multiplicité commune de λ et $\overline{\lambda}$.
Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M. D'après la question 29.(a), θ et u commutent. Soit $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Alors,

$$\theta \circ P(u) = \theta \circ \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \right) = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, \theta \circ u^k = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, u^k \circ \theta = \left(\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k}\, u^k \right) \circ \theta = \overline{P}(u) \circ \theta$$

En particulier,

$$\theta \circ (u - \lambda \,\mathrm{Id})^m = \left(u - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}\right)^m \circ \theta$$

Donc, pour tout $v \in E'_\lambda = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda\,\mathrm{Id})^m\right)$,

$$\left(u - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}\right)^m (\theta(v)) = \theta\left((u - \lambda\,\mathrm{Id})^m (v)\right) = \theta(0) = 0 \quad \text{donc} \quad \theta(v) \in \mathrm{Ker}\left(\left(u - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}\right)^m\right) = E'_{\overline{\lambda}}$$

Ainsi, $\theta\left(E'_\lambda\right) \subset E'_{\overline{\lambda}}$.
Par ailleurs, $\dim_{\mathbb{C}}\left(E'_\lambda\right) = \dim_{\mathbb{C}}(E'_{\overline{\lambda}}) = m$, donc $\dim_{\mathbb{R}}\left(E'_\lambda\right) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_{\overline{\lambda}}) = 2m$. Or θ est un automorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Donc, $\dim_{\mathbb{R}}(\theta\left(E'_\lambda\right)) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_\lambda) = \dim_{\mathbb{R}}(E'_{\overline{\lambda}})$. Ainsi, $\theta\left(E'_\lambda\right) = E'_{\overline{\lambda}}$.

b) Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la question précédente, E'_λ est stable par θ. Supposons que $\dim_{\mathbb{C}}(E'_\lambda)$ soit impaire.
Soit $v_1 \in E'_\lambda$ non nul. Alors $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_1, \theta(v_1))$ est un plan stable par θ inclus dans E'_λ (car E'_λ est stable par θ) d'après la question 29.(c).
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tels que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$, $1 \leqslant i \leqslant k$ soient des plans stables par θ vérifiant

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \subset E'_\lambda$$

Comme $\dim_{\mathbb{C}} \left(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \right) = 2k$ et $\dim_{\mathbb{C}}\left(E'_\lambda\right)$ est impair, l'inclusion précédente est stricte.

On fixe alors $w_{k+1} \in E'_\lambda$ tel que $w_{k+1} \notin \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$.

Comme $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i))$ est stable par θ, d'après la question 29.(b), $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_{k+1}, \theta(v_{k+1}))$ est un plan stable par θ inclus dans E'_λ (car E'_λ est stable par θ) et

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \right) \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_{k+1}, \theta(v_{k+1})) = \{0\}$$

Ainsi,

$$\bigoplus_{i=1}^{k+1} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_i, \theta(v_i)) \subset E'_\lambda$$

On aboutit à une contradiction dès que $k > \dfrac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}}(E'_\lambda)$. Ainsi, E'_λ est de dimension paire.

31. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $M := \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. On a montré que $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi, si λ est une racine complexe de multiplicité m, alors $\overline{\lambda}$ est également une racine de multiplicité m.
On factorise χ_M dans $\mathbb{C}[X]$

$$\chi_M = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i} (X - \overline{\lambda_i})^{m_i} \prod_{j=1}^{s} (X - \mu_j)^{n_j}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les racines non réelles à partie imaginaire strictement positive et où $\mu_1, \ldots, \mu_s$ sont les racines réelles.
D'après la question 30. pour tout $j \in [\![1, s]\!]$, $n_j = \dim_{\mathbb{C}} \left(E'_{\mu_j} \right)$ est pair.
Ainsi,

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{r} |\lambda_i|^{2m_i} \prod_{j=1}^{s} \mu_j^{n_j} \in \mathbb{R}_+$$