Math93.com

Baccalauréat 2026 - Spécialité Maths
Correction Amérique du Nord
Sujet 1 - 20 mai 2026

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Mathématiques

Spécialité Mathématiques

Corrigé détaillé

Amérique du Nord – 20 mai 2026

Sujet 1

SESSION	DURÉE	BARÈME
2026	**4 heures**	**20 points**

Exercice	Thème principal	Points
Exercice 1	Probabilités conditionnelles, loi binomiale et variables aléatoires	6 points
Exercice 2	Suites récurrentes, algorithme et équation différentielle	4 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace, produit scalaire et distance à un plan	5 points
Exercice 4	Fonction logarithme, limites, variations et convexité	5 points
Total	**Sujet complet**	**20 points**

Bac 2026

Tous les sujets, corrigés, fichiers LaTeX et bilans de notions de la session 2026 sont disponibles sur la page mère :

Annales Bac Maths 2026 – sujets, corrigés, fichiers LaTeX et notions évaluées

Conseil : le jour de l'épreuve, il faut numéroter clairement les questions, justifier chaque réponse, soigner les calculs et encadrer les résultats importants.

Exercice 1. Probabilités conditionnelles, loi binomiale et variables aléatoires — 6 points

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.
Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

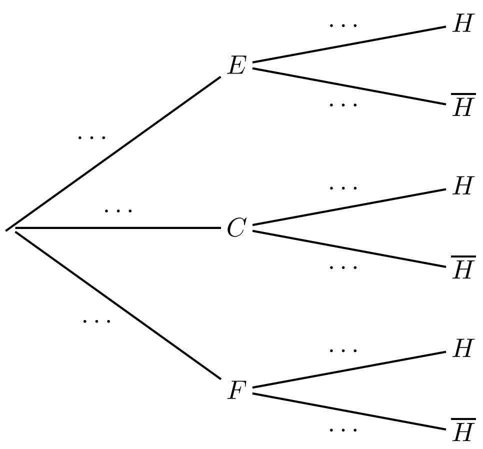
- $25\,\%$ des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et $15\,\%$ ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- $45\,\%$ des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- $30\,\%$ des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- $12\,\%$ des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



Corrigé

Arbre pondéré et probabilités conditionnelles

Dans un arbre pondéré :

- la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin ;
- une branche secondaire porte une probabilité conditionnelle.

D'après l'énoncé :

$$P(E) = 0,25 \qquad \text{et} \qquad P(F) = 0,15.$$

©ISSN 2272-5318

Comme les trois types d'abonnements forment une partition de l'univers, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(E) - P(F) \\ &= 1 - 0,25 - 0,15 \\ \boxed{P(C) = 0,60} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$P_E(H) = 0,45 \qquad \text{et} \qquad P_C(H) = 0,30.$$

Il reste à déterminer $P_F(H)$. D'après l'énoncé :

$$P(F \cap H) = 0,12.$$

Or :

$$P(F \cap H) = P(F) \times P_F(H).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & 0,12 = 0,15 \times P_F(H) \\ \iff \quad & P_F(H) = \frac{0,12}{0,15} \\ & \boxed{P_F(H) = 0,80} \end{aligned}$$

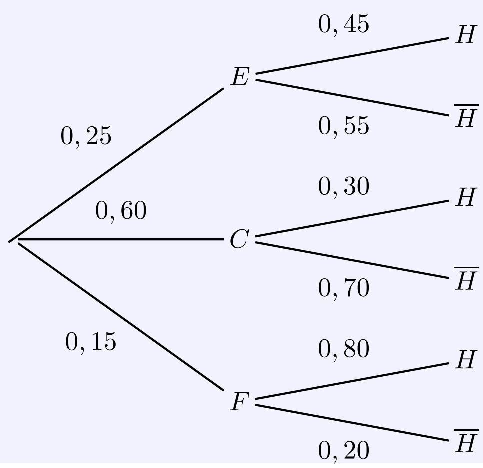
On complète ensuite les branches contraires :

$$P_E(\overline{H}) = 1 - 0,45 = 0,55,$$

$$P_C(\overline{H}) = 1 - 0,30 = 0,70,$$

$$P_F(\overline{H}) = 1 - 0,80 = 0,20.$$

On obtient donc l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.

Corrigé

Probabilité d'une intersection

Si A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$, alors :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

©ISSN 2272-5318

D'après l'arbre pondéré :

$$P(E) = 0,25 = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P_E(H) = 0,45 = \frac{9}{20}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(E \cap H) &= P(E) \times P_E(H) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{9}{20} \\ \boxed{P(E \cap H) = \frac{9}{80}} \end{aligned}$$

La valeur exacte de $P(E \cap H)$ est donc $\frac{9}{80}$.

3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de $0,4125$.

Corrigé

Formule des probabilités totales

Si les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de l'univers, alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

Les événements E, C et F forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(H) &= P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H) \\ &= P(E) \times P_E(H) + P(C) \times P_C(H) + P(F \cap H) \\ &= 0,25 \times 0,45 + 0,60 \times 0,30 + 0,12 \\ &= 0,1125 + 0,18 + 0,12 \\ \boxed{P(H) = 0,4125} \end{aligned}$$

La probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est donc bien $0,4125$.

4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». On arrondira le résultat au millième.

Corrigé

Probabilité conditionnelle

Si A et B sont deux événements avec $P(B) \neq 0$, alors la probabilité de A sachant B est :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On cherche la probabilité que l'abonné ait choisi l'abonnement « Étudiant » sachant qu'il a activé l'option « Écoute hors-ligne », c'est-à-dire $P_H(E)$.

©ISSN 2272-5318

D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{9}{80}}{0,4125}.$$

Or :

$$0,4125 = \frac{4125}{10000} = \frac{33}{80}.$$

Donc :

$$P_H(E) = \frac{\frac{9}{80}}{\frac{33}{80}} = \frac{9}{80} \times \frac{80}{33} = \frac{9}{33} = \frac{3}{11}$$

$$\boxed{P_H(E) \approx 0,273}$$

La probabilité demandée, arrondie au millième, est donc $0,273$.

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.
On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de $0,4125$.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

Corrigé

Loi binomiale

Une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsqu'elle compte le nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli, la probabilité de succès étant p.

On note alors :

$$X \sim \mathcal{B}(n; p).$$

Ici, on choisit 8 abonnés de manière indépendante.

Pour chaque abonné, on considère comme succès le fait d'avoir activé l'option « Écoute hors-ligne ».

La probabilité de succès est :

$$p = P(H) = 0,4125.$$

Ainsi :

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(8\ ;\ 0,4125).}$$

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». On arrondira le résultat au millième.

©ISSN 2272-5318

Corrigé

L'événement « aucun des huit abonnés n'a activé l'option » correspond à l'événement $\{X = 0\}$.
Comme $X \sim \mathcal{B}(8\ ;\ 0,4125)$, on a :

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{8}{0}(0,4125)^0(1-0,4125)^8 \\ &= 0,5875^8 \\ &\approx 0,0141926. \end{aligned}$$

Ainsi, au millième :

$$\boxed{P(X=0) \approx 0,014}$$

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.
On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise.
On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».

3. a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0,5875^n$.

Corrigé

Probabilité de l'événement contraire

Pour tout événement A, on a :
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Dans le cas d'une succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

L'événement « au moins un abonné a activé l'option » est le contraire de l'événement « aucun abonné n'a activé l'option ».
Pour un abonné, la probabilité de ne pas avoir activé l'option est :

$$1 - 0,4125 = 0,5875.$$

Comme les choix sont indépendants, la probabilité qu'aucun des n abonnés n'ait activé l'option est :

$$0,5875^n.$$

Ainsi :

$$q_n = 1 - 0,5875^n.$$

On a donc bien :

$$\boxed{q_n = 1 - 0,5875^n}$$

3. b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à $99,9\,\%$.

Corrigé

On cherche le plus petit entier naturel non nul n tel que :

$$q_n \geqslant 99,9\,\%.$$

©ISSN 2272-5318

Or :

$$99,9\,\% = 0,999.$$

On résout donc l'inéquation :

$$\begin{aligned} q_n \geqslant 0,999 &\iff 1 - 0,5875^n \geqslant 0,999 \\ &\iff -0,5875^n \geqslant -0,001 \\ &\iff 0,5875^n \leqslant 0,001. \end{aligned}$$

Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0,5875^n \leqslant 0,001 &\iff \ln\left(0,5875^n\right) \leqslant \ln(0,001) \\ &\iff n\ln(0,5875) \leqslant \ln(0,001). \end{aligned}$$

Or :

$$0 < 0,5875 < 1 \quad \text{donc} \quad \ln(0,5875) < 0.$$

En divisant par le nombre négatif $\ln(0,5875)$, on inverse le sens de l'inégalité :

$$n\ln(0,5875) \leqslant \ln(0,001) \iff n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)}.$$

À la calculatrice :

$$\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \approx 12,987.$$

Le plus petit entier naturel non nul convenable est donc :

$$\boxed{n = 13.}$$

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 euros de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y.

Corrigé

On distingue les trois abonnements et le fait que l'option « Écoute hors-ligne » soit activée ou non.

- Pour l'abonnement « Étudiant » :
$$5 \quad \text{ou} \quad 5 + 2 = 7.$$
- Pour l'abonnement « Classique » :
$$10 \quad \text{ou} \quad 10 + 2 = 12.$$
- Pour l'abonnement « Famille » :
$$16 \quad \text{ou} \quad 16 + 2 = 18.$$

Ainsi, les six valeurs possibles de Y sont :

$$\boxed{\{5\ ;\ 7\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 16\ ;\ 18\}.}$$

©ISSN 2272-5318

2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Corrigé

On utilise l'arbre pondéré de la partie A.

- Pour $Y = 5$, l'abonné a choisi « Étudiant » sans l'option :

$$\begin{aligned} P(Y=5) &= P(E \cap \overline{H}) \\ &= P(E) \times P_E(\overline{H}) \\ &= 0,25 \times 0,55 \\ &= 0,1375 \\ &= \frac{11}{80}. \end{aligned}$$

- Pour $Y = 7$, l'abonné a choisi « Étudiant » avec l'option :

$$\begin{aligned} P(Y=7) &= P(E \cap H) \\ &= \frac{9}{80}. \end{aligned}$$

- Pour $Y = 10$, l'abonné a choisi « Classique » sans l'option :

$$\begin{aligned} P(Y=10) &= P(C \cap \overline{H}) \\ &= 0,60 \times 0,70 \\ &= 0,42 \\ &= \frac{21}{50}. \end{aligned}$$

- Pour $Y = 12$, l'abonné a choisi « Classique » avec l'option :

$$\begin{aligned} P(Y=12) &= P(C \cap H) \\ &= 0,60 \times 0,30 \\ &= 0,18 \\ &= \frac{9}{50}. \end{aligned}$$

- Pour $Y = 16$, l'abonné a choisi « Famille » sans l'option :

$$\begin{aligned} P(Y=16) &= P(F \cap \overline{H}) \\ &= 0,15 \times 0,20 \\ &= 0,03 \\ &= \frac{3}{100}. \end{aligned}$$

- Pour $Y = 18$, l'abonné a choisi « Famille » avec l'option :

$$\begin{aligned} P(Y=18) &= P(F \cap H) \\ &= 0,12 \\ &= \frac{3}{25}. \end{aligned}$$

On obtient donc la loi de probabilité suivante :

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y = y_i)$	$\frac{11}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{25}$

3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut $10,475$ et interpréter ce résultat dans le contexte.

Corrigé

Espérance d'une variable aléatoire

Si une variable aléatoire Y prend les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$, alors :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i.$$

D'après la loi de probabilité obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= 5 \times \frac{11}{80} + 7 \times \frac{9}{80} + 10 \times \frac{21}{50} + 12 \times \frac{9}{50} + 16 \times \frac{3}{100} + 18 \times \frac{3}{25} \\
&= \frac{55}{80} + \frac{63}{80} + \frac{210}{50} + \frac{108}{50} + \frac{48}{100} + \frac{54}{25} \\
&= \frac{419}{40}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = 10,475}$$

L'espérance de la variable aléatoire Y est donc égale à $10,475$.

Cela signifie que, sur un grand nombre d'abonnés, le montant moyen payé mensuellement par abonné est d'environ $10,475$ euros.

$$\boxed{\text{La plateforme peut espérer recevoir en moyenne } 10,475 \text{ euros par mois et par abonné.}}$$

4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y, arrondie au centième.

Corrigé

Variance et formule de Kœnig

Si Y est une variable aléatoire, alors :

$$V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2.$$

À l'aide de la calculatrice, ou en utilisant la formule de Kœnig, on obtient :

$$E(Y^2) = 123,43.$$

Comme :

$$E(Y) = 10,475,$$

on a :

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 \\
&= 123,43 - 10,475^2 \\
&= 13,704375.
\end{aligned}$$

Arrondie au centième, la variance vaut donc :

$$\boxed{V(Y) \approx 13,70}$$

©ISSN 2272-5318

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

5. a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z.

Corrigé

Écart-type et variance

L'écart-type $\sigma(Z)$ d'une variable aléatoire Z est la racine carrée de sa variance :

$$\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)}.$$

Ainsi :

$$V(Z) = \big(\sigma(Z)\big)^2.$$

On sait que :

$$\sigma(Z) = 2.$$

Donc :

$$\begin{aligned} V(Z) &= \big(\sigma(Z)\big)^2 \\ &= 2^2 \\ \end{aligned}$$
$$\boxed{V(Z) = 4}$$

5. b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins $50\,\%$ de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

Justifier cette affirmation.

Corrigé

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit Z une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(Z)$.
Pour tout réel $\delta > 0$, on a :

$$P\big(|Z-\mu| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(Z)}{\delta^2}.$$

On sait que :

$$E(Z) = 9 \qquad \text{et} \qquad V(Z) = 4.$$

Dire que le prix de l'abonnement est strictement compris entre 6 et 12 euros revient à dire que :

$$6 < Z < 12.$$

Or :

$$6 < Z < 12 \iff |Z-9| < 3.$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec :

$$\mu = 9, \qquad V(Z) = 4 \qquad \text{et} \qquad \delta = 3.$$

©ISSN 2272-5318

On obtient :

$$P\big(|Z-9| \geqslant 3\big) \leqslant \frac{4}{3^2}$$

$$\boxed{P\big(|Z-9| \geqslant 3\big) \leqslant \frac{4}{9}}$$

Donc, par passage à l'événement contraire :

$$\begin{aligned} P\big(|Z-9| < 3\big) &= 1 - P\big(|Z-9| \geqslant 3\big) \\ &\geqslant 1 - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{P\big(|Z-9| < 3\big) \geqslant \frac{5}{9}}$$

Or :

$$\frac{5}{9} \approx 0,556 > 0,50.$$

Ainsi :

$$P(6 < Z < 12) \geqslant \frac{5}{9} > 50\,\%.$$

L'affirmation du responsable est donc justifiée.

$\boxed{\text{Il y a bien au moins } 50\,\% \text{ de chances que le prix soit strictement compris entre } 6 \text{ et } 12 \text{ euros.}}$

Exercice 2. Suites récurrentes, algorithme et équation différentielle — 4 points

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à $4\,000$ individus au 1er janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n).
Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1er janvier de l'année $2025 + n$.
La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 4$;
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n, $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donnée par ce modèle.

Corrigé

On cherche le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026.

Comme u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, au 1er janvier de l'année $2025 + n$, l'année 2026 correspond à $n = 1$.

On calcule donc u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= 4 - \frac{4}{u_0} \\ &= 4 - \frac{4}{4} \\ &= 4 - 1 \\ &\boxed{u_1 = 3} \end{aligned}$$

Ainsi, le modèle prévoit 3 milliers de perches-soleil au 1er janvier 2026.

$\boxed{\text{Le nombre de perches-soleil prévu au 1}^{\text{er}}\text{ janvier 2026 est } 3\,000.}$

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = 4 - \dfrac{4}{x}$.

2. a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Corrigé

Sens de variation et signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante sur I.
Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

©ISSN 2272-5318

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(4 - \frac{4}{x}\right)' \\ &= 0 - 4\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= -4\left(-\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{4}{x^2}}$$

Or, pour tout $x > 0$:

$$x^2 > 0.$$

Donc :

$$\boxed{h'(x) > 0}$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est croissante sur }]0; +\infty[.}$$

2. b. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

Corrigé

Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n, on procède en trois étapes :

- **Initialisation :** on vérifie que la propriété est vraie au premier rang ;
- **Hérédité :** on suppose que la propriété est vraie à un rang n fixé et on démontre qu'elle est vraie au rang suivant ;
- **Conclusion :** on conclut par le principe de récurrence.

On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\mathcal{P}_n : \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

- **Initialisation.**
  On a :
  $$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad u_1 = 3.$$
  Ainsi :
  $$2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 4.$$
  Donc :
  $$2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4.$$
  La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité.**
  Soit n un entier naturel. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie, c'est-à-dire :
  $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$
  La fonction h est croissante sur $]0; +\infty[$ et tous les termes de la suite sont strictement positifs.

©ISSN 2272-5318

On applique donc h aux membres de l'encadrement utile :

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \implies h(2) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n).$$

Or :

$$h(2) = 4 - \frac{4}{2} = 2,$$

et, par définition de la suite :

$$h(u_{n+1}) = u_{n+2} \quad \text{et} \quad h(u_n) = u_{n+1}.$$

Ainsi :

$$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

De plus, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} \leqslant 4.$$

On obtient donc :

$$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion.**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire.
  D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.}$$

2. c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Corrigé

Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, on a :

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

En particulier :

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

La suite (u_n) est donc décroissante.
De plus, toujours d'après l'encadrement précédent, la suite (u_n) est minorée par 2.
La suite (u_n) est donc décroissante et minorée.
D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ avec :

$$2 \leqslant \ell.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \text{ avec } 2 \leqslant \ell.}$$

2. d. Justifier que $\ell = 2$.

Corrigé

©ISSN 2272-5318

Image d'une suite convergente par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si une suite (u_n) d'éléments de I converge vers un réel $\ell \in I$, alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$.
En particulier, si la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

et si (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient donc :

$$f(\ell) = \ell.$$

- D'après la question précédente, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ avec :

$$2 \leqslant \ell.$$

- La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc elle est continue sur $]0; +\infty[$.
  Comme $\ell \geqslant 2$, on a bien $\ell \in]0; +\infty[$.
- Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = h(u_n).$$

  Comme (u_n) converge vers ℓ, la suite extraite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ.
  De plus, comme h est continue sur $]0; +\infty[$, la suite $\big(h(u_n)\big)$ converge vers $h(\ell)$.
- Or, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = h(u_n).$$

  Par unicité de la limite, on obtient :

$$\ell = h(\ell).$$

  Ainsi :

$$\ell = 4 - \frac{4}{\ell}.$$

  Comme $\ell \geqslant 2$, on a $\ell > 0$, on peut donc multiplier par ℓ :

$$\begin{aligned} \ell = 4 - \frac{4}{\ell} &\iff \ell^2 = 4\ell - 4 \\ &\iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \\ &\iff (\ell - 2)^2 = 0 \\ &\iff \ell = 2. \end{aligned}$$

- Finalement :

$$\boxed{\ell = 2.}$$

2. e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

Corrigé

D'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Or u_n est exprimé en millier d'individus. Ainsi, à long terme, le modèle prévoit une population qui tend vers :

2 milliers d'individus, c'est-à-dire 2 000 individus.

©ISSN 2272-5318

La population ne tend donc pas vers 0.

$\boxed{\text{Ce modèle ne prévoit pas une élimination à long terme de l'espèce envahissante.}}$

3. On considère le script Python ci-dessous.

3. a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2\ ;\ 4[$.
Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
def population(s):
    u=4
    n=0
    while ... :
        u = ...
        n = ...
    return n
```

Corrigé

On veut que le programme renvoie le plus petit entier n tel que :

$$u_n < s.$$

Il faut donc continuer la boucle tant que cette condition n'est pas encore vérifiée, c'est-à-dire tant que :

$$u \geqslant s.$$

Remarque

On sait que la condition sera atteinte si s est un réel appartenant à l'intervalle $]2\ ;\ 4[$ puisque la suite converge vers 2 et est de premier terme 4. On va le démontrer plus rigoureusement dans la question suivante.

À chaque passage dans la boucle :

- on remplace u par le terme suivant de la suite :

$$u \leftarrow 4 - \frac{4}{u};$$

- on augmente le rang n de 1 :

$$n \leftarrow n + 1.$$

Le script complété est donc :

```
def population(s):
    u=4
    n=0
    while u >= s:
        u = 4 - 4/u
        n  =n + 1
    return n
```

3. b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Définition de la limite d'une suite

Dire qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$:

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On cherche le plus petit entier n tel que :

$$u_n < 2,2.$$

D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et converge vers 2.

Ainsi, d'après la définition de la limite, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont aussi proches de 2 que l'on veut. En particulier, comme la suite est minorée par 2, à partir d'un certain rang, on a :

$$2 \leqslant u_n < 2,2.$$

Il reste à calculer les termes successifs jusqu'au franchissement du seuil $2,2$.

$$\begin{aligned}
u_0 &= 4, \\
u_1 &= 3, \\
\cdots &= \cdots \\
u_9 &= 4 - \frac{4}{\frac{20}{9}} = \frac{11}{5} = 2,2 \\
u_{10} &= \frac{24}{11} \approx 2,182 < 2,2
\end{aligned}$$

La commande renvoie donc :

$$\boxed{10.}$$

Cela signifie que le plus petit entier n tel que la population soit strictement inférieure à $2,2$ milliers d'individus est $n = 10$.

Comme $2025 + 10 = 2035$, cela signifie que, selon ce modèle, la population devient strictement inférieure à 2 200 perches-soleil au 1er janvier 2035.

La commande `population(2.2)` renvoie 10.

©ISSN 2272-5318

Partie B : étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1er janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

- la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$;
- $p(0) = 4$;
- la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2$ où y est une fonction de la variable réelle t.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Corrigé

Équation différentielle $y' = ay + b$

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$.
Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

sont les fonctions définies sur un intervalle I par :

$$y(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a},$$

où C est une constante réelle.

L'équation (E) est :

$$y' + y = 2.$$

On la récrit sous la forme :

$$y' = -y + 2.$$

Il s'agit donc d'une équation différentielle de la forme :

$$y' = ay + b$$

avec :

$$a = -1 \quad \text{et} \quad b = 2.$$

D'après le rappel de cours, les solutions sont les fonctions définies par :

$$y(t) = Ce^{-t} - \frac{2}{-1}$$

$$\boxed{y(t) = Ce^{-t} + 2}$$

où $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\left\{t \longmapsto Ce^{-t} + 2\ ;\ C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ est $p(t) = 2e^{-t} + 2$.

Corrigé

D'après la question précédente, la fonction p est de la forme :

$$p(t) = Ce^{-t} + 2,$$

©ISSN 2272-5318

où C est une constante réelle.
On utilise la condition initiale :

$$p(0) = 4.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p(0) = 4 &\iff Ce^0 + 2 = 4 \\ &\iff C + 2 = 4 \\ &\iff C = 2. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{p(t) = 2e^{-t} + 2}$$

3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

Corrigé

On étudie la limite de $p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
On a :

$$p(t) = 2e^{-t} + 2.$$

Or :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(2e^{-t} + 2\right)$$
$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} p(t) = 2}$$

Comme $p(t)$ est exprimé en millier d'individus, ce modèle prévoit qu'à long terme la population tend vers :

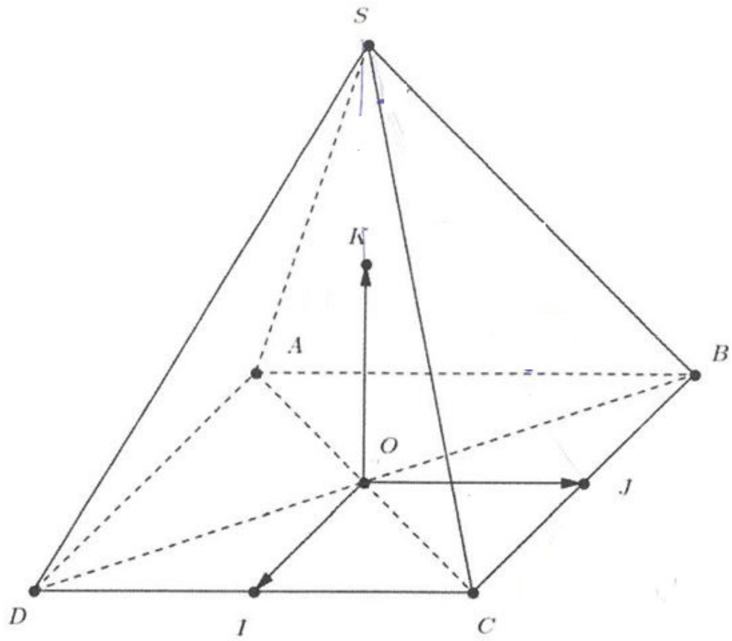
2 000 individus.

La population ne tend donc pas vers 0.

$$\boxed{\text{Ce modèle ne prévoit pas une élimination à long terme de l'espèce envahissante.}}$$

Exercice 3. Géométrie dans l'espace, produit scalaire et distance à un plan — 5 points

Dans cet exercice l'unité est le cm.
On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$ cm ;
- I est le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[OS]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,,\,\overrightarrow{OJ}\,,\,\overrightarrow{OK}\right)$.
On admet que $B(-1\,;\,1\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, et $S(0\,;\,0\,;\,2)$.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Donner les coordonnées des points A et D.

Corrigé

Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,,\,\overrightarrow{OJ}\,,\,\overrightarrow{OK}\right)$, le point O est le centre du carré $ABCD$.
On sait que :

$$B(-1\,;\,1\,;\,0) \quad \text{et} \quad C(1\,;\,1\,;\,0).$$

Comme le carré $ABCD$ est dans le plan d'équation $z = 0$, les quatre sommets ont une cote nulle.
Le point J est le milieu de $[BC]$, donc $J(0\,;\,1\,;\,0)$, ce qui est cohérent avec le vecteur $\overrightarrow{OJ}$.
Le point I est le milieu de $[CD]$, donc $I(1\,;\,0\,;\,0)$, ce qui impose :

$$D(1\,;\,-1\,;\,0).$$

Par symétrie dans le carré, on obtient alors :

$$A(-1\,;\,-1\,;\,0).$$

Ainsi :

$$\boxed{A(-1\,;\,-1\,;\,0) \quad \text{et} \quad D(1\,;\,-1\,;\,0).}$$

©ISSN 2272-5318

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$.

Corrigé

Produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé de l'espace, si

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.$$

On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{SC}$ et $\overrightarrow{SB}$.

$$\overrightarrow{SC}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix} -1-0 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} &= 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2) \\ &= -1 + 1 + 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = 4}$$

3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

Corrigé

Produit scalaire et angle

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos(\theta),$$

où θ est l'angle formé par les deux vecteurs.

L'angle $\widehat{BSC}$ est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$.
Calculons les normes :

$$\begin{aligned} SC &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{6}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} SB &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{6}. \end{aligned}$$

©ISSN 2272-5318

D'après la formule du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} &= SC \times SB \times \cos\left(\widehat{BSC}\right)\\ 4 &= \sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos\left(\widehat{BSC}\right)\\ 4 &= 6\cos\left(\widehat{BSC}\right)\\ \iff \cos\left(\widehat{BSC}\right) &= \frac{4}{6}\\ \boxed{\cos\left(\widehat{BSC}\right) = \frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\widehat{BSC} &= \arccos\left(\frac{2}{3}\right)\\ &\approx 48,189°.\end{aligned}$$

Arrondie au dixième de degré près :

$$\boxed{\widehat{BSC} \approx 48,2°.}$$

Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC).

1. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

1. a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (SBC).

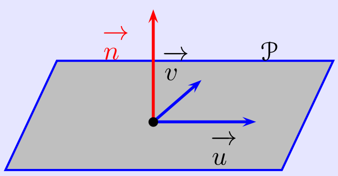
Corrigé

Vecteur normal à un plan

Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Autrement dit, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$, alors :

$$\overrightarrow{n} \text{ normal à } \mathcal{P} \iff \begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v} = 0\end{cases}$$



©ISSN 2272-5318

On sait que :

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$ sont deux vecteurs du plan (SBC).
D'après la partie A :

$$\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SC}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

On calcule les produits scalaires :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SB} &= 0\times(-1)+2\times 1+1\times(-2)\\ &= 0+2-2\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0}$$

et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SC} &= 0\times 1+2\times 1+1\times(-2)\\ &= 0+2-2\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0}$$

De plus, les vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$ ne sont pas colinéaires car leurs premières coordonnées sont opposées alors que leurs deuxièmes et troisièmes coordonnées sont égales.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC).

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est normal au plan } (SBC).}$$

1. b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y+z-2=0$.

Corrigé

Équation cartésienne d'un plan connaissant un vecteur normal

Dans un repère orthonormé de l'espace, si un plan $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},$$

alors une équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0.$$

Le plan (SBC) admet pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne de ce plan est donc de la forme :

$$0x+2y+z+d=0,$$

c'est-à-dire :

$$2y+z+d=0.$$

Comme le point $S(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$ appartient au plan (SBC), ses coordonnées vérifient l'équation :

$$\begin{aligned} 2\times 0+2+d&=0 \\ \iff d&=-2. \end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan (SBC) est :

$$\boxed{2y+z-2=0.}$$

2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).

2. a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2t \\ z &= t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

Corrigé

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit d une droite passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant pour vecteur directeur

$$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Un point $M(x;y;z)$ appartient à la droite d si, et seulement si, il existe un réel t tel que :

$$\overrightarrow{AM}=t\vec{u}.$$

On obtient alors une représentation paramétrique de d :

$$d:\begin{cases} x &= x_A+ta \\ y &= y_A+tb \\ z &= z_A+tc \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

Le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).
La droite (OH) est donc perpendiculaire au plan (SBC).
Or le vecteur

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est normal au plan (SBC).
Ainsi, la droite (OH) a pour vecteur directeur $\vec{n}$ et elle passe par le point $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.
Une représentation paramétrique de (OH) est donc :

$$\begin{cases} x &= 0+0t \\ y &= 0+2t \\ z &= 0+t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

©ISSN 2272-5318

C'est-à-dire :

$$\boxed{(OH) : \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2t \\ z &= t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.}$$

2. b. Calculer les coordonnées du point H.

Corrigé

Le point H appartient à la fois à la droite (OH) et au plan (SBC).

On utilise donc :

$$(OH) : \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2t \\ z &= t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$

et l'équation du plan :

$$2y + z - 2 = 0.$$

En remplaçant x, y et z dans l'équation du plan, on obtient :

$$\begin{aligned} 2y + z - 2 = 0 &\iff 2(2t) + t - 2 = 0 \\ &\iff 4t + t - 2 = 0 \\ &\iff 5t - 2 = 0 \\ &\iff t = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$x = 0, \qquad y = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}, \qquad z = \frac{2}{5}.$$

Ainsi :

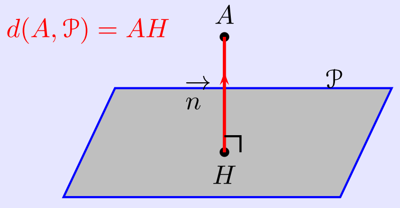
$$\boxed{H\left(0\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{2}{5}\right).}$$

2. c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Corrigé

Distance d'un point à un plan

La distance d'un point A à un plan $\mathcal{P}$ est la longueur AH, où H est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.



Ici, le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).

La distance du point O au plan (SBC) est donc la distance OH.

Comme :

$$O(0\,;\,0\,;\,0) \quad \text{et} \quad H\left(0\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{2}{5}\right),$$

©ISSN 2272-5318

on a :

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{4}{5}-0\right)^2 + \left(\frac{2}{5}-0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{20}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{20}}{5} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La distance du point } O \text{ au plan } (SBC) \text{ est } \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}}$$

Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la partie B par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur.}$$

1. a. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

Corrigé

La pyramide $SABCD$ a pour base le carré $ABCD$.
Comme :

$$AB = 2 \text{ cm},$$

l'aire du carré $ABCD$ vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABCD} &= AB^2 \\ &= 2^2 \\ \boxed{\mathcal{A}_{ABCD} = 4} \end{aligned}$$

La hauteur de la pyramide $SABCD$ est OS, et :

$$OS = 2 \text{ cm}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} V_{SABCD} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times OS \\ &= \frac{1}{3} \times 4 \times 2 \\ \boxed{V_{SABCD} = \frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $SABCD$ est donc $\frac{8}{3}$ cm^3.

1. b. En déduire que le volume de la pyramide $OCBS$ est égal à $\frac{2}{3}$ cm^3.

©ISSN 2272-5318

Corrigé

Le point O est le centre du carré $ABCD$.

Les segments $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$ partagent le carré $ABCD$ en quatre triangles de même aire :

$$OAB, \quad OBC, \quad OCD, \quad ODA.$$

Les pyramides de sommet S et de bases respectives ces quatre triangles ont donc le même volume, car elles ont la même hauteur issue de S sur le plan de base.

Ainsi, la pyramide $OCBS$ représente le quart du volume de la pyramide $SABCD$.

Donc :

$$\begin{aligned} V_{OCBS} &= \frac{1}{4}V_{SABCD} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} \\ \boxed{V_{OCBS} = \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $OCBS$ est donc bien égal à $\frac{2}{3}$ cm^3.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC.

Corrigé

On calcule l'aire du triangle SBC en prenant BC comme base.

On sait que :

$$BC = 2 \text{ cm}.$$

Le point J est le milieu de $[BC]$. Comme le triangle SBC est isocèle en S, la droite (SJ) est la hauteur issue de S dans le triangle SBC.

Dans le repère, on a :

$$J(0\ ;\ 1\ ;\ 0) \quad \text{et} \quad S(0\ ;\ 0\ ;\ 2).$$

Donc :

$$\begin{aligned} SJ &= \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-2)^2} \\ &= \sqrt{1+4} \\ \boxed{SJ = \sqrt{5}} \end{aligned}$$

L'aire du triangle SBC vaut donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{SBC} &= \frac{BC \times SJ}{2} \\ &= \frac{2 \times \sqrt{5}}{2} \\ \boxed{\mathcal{A}_{SBC} = \sqrt{5}} \end{aligned}$$

3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Corrigé

On considère la pyramide $OCBS$.

Elle peut avoir pour base le triangle SBC. Sa hauteur correspond alors à la distance du point O au plan (SBC).

Notons cette distance d.

D'après la formule du volume d'une pyramide :

$$V_{OCBS} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{SBC} \times d.$$

D'après les questions précédentes :

$$V_{OCBS} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{SBC} = \sqrt{5}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times d \\ \iff\ & 2 = \sqrt{5}\, d \\ \iff\ & d = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \iff\ & d = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

On retrouve donc :

$$\boxed{\text{La distance du point } O \text{ au plan } (SBC) \text{ est } \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}}$$

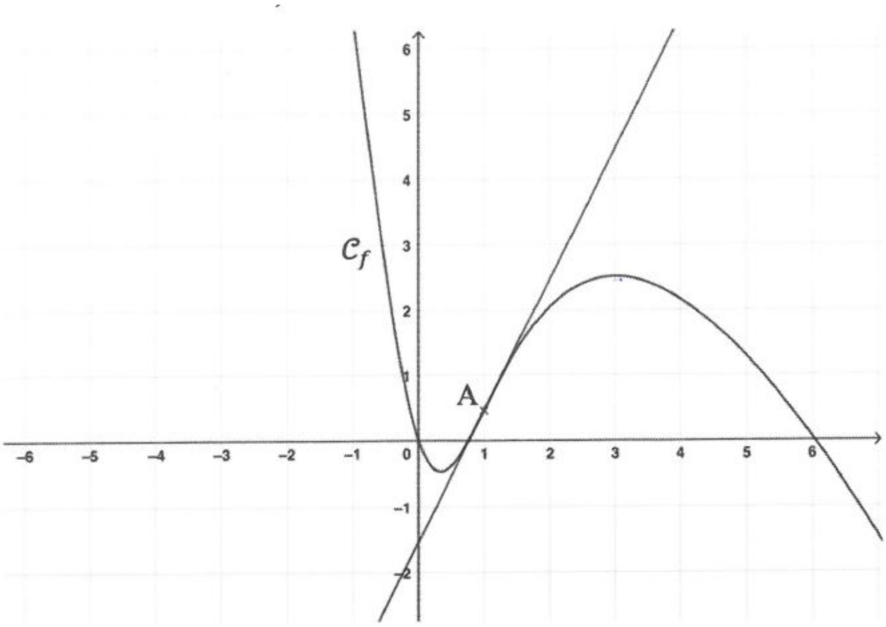
©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Fonction logarithme, limites, variations et convexité — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x$$

et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Corrigé

Fonction convexe, fonction concave et tangentes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite **convexe** sur I lorsque sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses sécantes.
- La fonction f est dite **concave** sur I lorsque la fonction $-f$ est convexe sur I.
  Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f est située au-dessus de ses sécantes.
- Si f est dérivable sur I, alors :

$$\begin{cases} f \text{ convexe sur } I \iff \mathcal{C}_f \text{ est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur } I. \\ f \text{ concave sur } I \iff \mathcal{C}_f \text{ est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur } I. \end{cases}$$

- Si f est deux fois dérivable sur I, alors :

$$\begin{cases} f'' \geqslant 0 \text{ sur } I \iff f \text{ est convexe sur } I, \\ f'' \leqslant 0 \text{ sur } I \iff f \text{ est concave sur } I. \end{cases}$$

D'après la représentation graphique, la courbe semble changer de convexité aux abscisses -1 et 1.

- Sur l'intervalle $[-1;1]$, la courbe semble tournée vers le haut. Elle semble donc située au-dessus de ses tangentes : on conjecture que la fonction f est convexe sur $[-1;1]$.

©ISSN 2272-5318

- Sur les intervalles $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$, la courbe semble tournée vers le bas. Elle semble donc située au-dessous de ses tangentes : on conjecture que la fonction f est concave sur ces deux intervalles.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ semble convexe sur } [-1;1], \\ f \text{ semble concave sur }]-\infty;-1] \text{ et sur } [1;+\infty[. \end{array}}$$

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

Corrigé

Propriété 1 (Limites liées à la fonction logarithme)

- (1) limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$
- (2) croissances comparées :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
- (3) (nombre dérivé en 1) :
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On rappelle que :

$$f(x) = 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x.$$

Lorsque $x \to -\infty$, on a :

$$x^2+1 \to +\infty.$$

Donc, par composition avec la fonction logarithme :

$$\ln\left(x^2+1\right) \to +\infty.$$

De plus :

$$-3x \to +\infty.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(5\ln\left(x^2+1\right) - 3x\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

3. **3. a.** Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Corrigé

Propriétés algébriques du logarithme

Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Pour tout réel strictement positif a et tout entier n, on a :

$$\ln(a^n) = n\ln(a).$$

©ISSN 2272-5318

Soit $x > 0$.
On a :

$$x^2 + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\ln\left(x^2+1\right) - 3x \\ &= 5\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\ &= 5\left(\ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\ &= 5\left(2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\ &= 10\ln(x) - 3x + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).}$$

3. b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

Corrigé

Propriété 2 (Limites liées à la fonction logarithme)

- (1) limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$
- (2) croissances comparées :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$
- (3) (nombre dérivé en 1) :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On utilise l'expression obtenue à la question précédente :

$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

D'après les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) = -3.$$

Comme :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) = -\infty.$$

©ISSN 2272-5318

Par ailleurs :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1) = 0.$$

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

4. **4. a.** Démontrer que pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}.$$

Corrigé

Dérivée de $\ln(u)$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Alors la fonction $x \longmapsto \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable sur I et :

$$\big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose :

$$u(x) = x^2+1.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad u(x) > 0.$$

Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(5\ln\left(x^2+1\right) - 3x\right)' \\ &= 5\times\frac{2x}{x^2+1} - 3 \\ &= \frac{10x}{x^2+1} - 3 \\ &= \frac{10x - 3(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{10x-3x^2-3}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}}$$

4. b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

On sait que :

$$f'(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}.$$

Pour tout réel x, on a :

$$x^2+1 > 0.$$

©ISSN 2272-5318

Le signe de $f'(x)$ est donc celui du trinôme :

$$-3x^2+10x-3.$$

On résout :

$$\begin{aligned} & -3x^2+10x-3=0 \\ \iff\ & 3x^2-10x+3=0. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-10)^2-4\times 3\times 3 \\ &= 100-36 \\ & \boxed{\Delta = 64} \end{aligned}$$

Les deux racines sont :

$$x_1=\frac{10-\sqrt{64}}{2\times 3}=\frac{10-8}{6}=\frac{1}{3},$$
$$x_2=\frac{10+\sqrt{64}}{2\times 3}=\frac{10+8}{6}=3.$$

Comme le coefficient dominant de $-3x^2+10x-3$ est négatif, ce trinôme est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur.

Ainsi :

$$f'(x)<0 \text{ sur }]-\infty;\tfrac{1}{3}[,\quad f'(x)>0 \text{ sur }]\tfrac{1}{3};3[,\quad f'(x)<0 \text{ sur }]3;+\infty[.$$

On calcule les valeurs aux extremums :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= 5\ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2+1\right)-3\times\frac{1}{3} \\ &= 5\ln\left(\frac{1}{9}+1\right)-1 \\ & \boxed{f\left(\frac{1}{3}\right)=5\ln\left(\frac{10}{9}\right)-1} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & f(3)=5\ln(3^2+1)-3\times 3 \\ & \boxed{f(3)=5\ln(10)-9} \end{aligned}$$

D'après les questions précédentes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

©ISSN 2272-5318

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$5\ln\left(\frac{10}{9}\right)-1$	$\nearrow$	$5\ln(10)-9$	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi, la fonction f est :

- décroissante sur $]-\infty;\frac{1}{3}]$;
- croissante sur $[\frac{1}{3};3]$;
- décroissante sur $[3;+\infty[$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$f''(x)=\frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}.$$

5. a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.

Corrigé

Convexité et signe de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si $f''(x)\geqslant 0$ sur I, alors f est convexe sur I.
- Si $f''(x)\leqslant 0$ sur I, alors f est concave sur I.

On a, pour tout réel x :

$$f''(x)=\frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif :

$$(x^2+1)^2>0.$$

Le signe de $f''(x)$ est donc celui du numérateur :

$$-10x^2+10=10(1-x^2).$$

On résout :

$$\begin{aligned}1-x^2\geqslant 0 &\iff (1-x)(1+x)\geqslant 0\\ &\iff -1\leqslant x\leqslant 1.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f''(x)\geqslant 0 \text{ sur } [-1;1],$$

et :

$$f''(x)\leqslant 0 \text{ sur }]-\infty;-1] \text{ et sur } [1;+\infty[.$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est convexe sur } [-1;1],\\ f \text{ est concave sur }]-\infty;-1] \text{ et sur } [1;+\infty[.\end{array}}$$

©ISSN 2272-5318

La conjecture faite à partir du graphique est donc validée.

5. b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Corrigé

Équation d'une tangente

Si f est dérivable en a, alors l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

On calcule d'abord $f(1)$:

$$f(1) = 5\ln(1^2+1) - 3\times 1$$
$$\boxed{f(1) = 5\ln(2) - 3}$$

Puis :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{-3\times 1^2 + 10\times 1 - 3}{1^2+1} \\ &= \frac{-3+10-3}{2} \\ &= \frac{4}{2} \end{aligned}$$
$$\boxed{f'(1) = 2}$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= 2(x-1) + 5\ln(2) - 3 \\ &= 2x - 2 + 5\ln(2) - 3 \end{aligned}$$
$$\boxed{y = 2x + 5\ln(2) - 5}$$

5. c. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$,

$$\ln(x^2+1) \leqslant x + \ln(2) - 1.$$

Corrigé

Fonction concave et tangente

Si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors sa courbe représentative est située en dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle.

Ainsi, pour tout $x \in I$:

$$f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a),$$

où $a \in I$.

D'après la question 5.a, la fonction f est concave sur $[1;+\infty[$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = 2x + 5\ln(2) - 5.$$

Comme une fonction concave est située sous ses tangentes, pour tout $x \geqslant 1$, on a :

$$f(x) \leqslant 2x + 5\ln(2) - 5.$$

Or :

$$f(x) = 5\ln(x^2+1) - 3x.$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} & 5\ln(x^2+1) - 3x \leqslant 2x + 5\ln(2) - 5 \\ \iff \; & 5\ln(x^2+1) \leqslant 5x + 5\ln(2) - 5 \\ \iff \; & \ln(x^2+1) \leqslant x + \ln(2) - 1. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad \ln(x^2+1) \leqslant x + \ln(2) - 1.}$$

Fin du devoir