



Math93.com

Baccalauréat 2026 - Spécialité Maths

Correction Amérique du Nord

Sujet 2 - 21 mai 2026

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Mathématiques

Spécialité Mathématiques

Corrigé détaillé

Amérique du Nord – 21 mai 2026
Sujet 2

SESSION
2026

DURÉE
4 heures

BARÈME
20 points

Exercice	Thème principal	Points
Exercice 1	Probabilités conditionnelles, loi binomiale et concentration	4 points
Exercice 2	Fonction, suite récurrente et somme de termes	6 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace, produit scalaire et distance à un plan	5 points
Exercice 4	Fonction logarithme, variations, intégration par parties	5 points
Total	Sujet complet	20 points



Bac 2026

Tous les sujets, corrigés, fichiers \LaTeX et bilans de notions de la session 2026 sont disponibles sur la page mère :

Annales Bac Maths 2026 – sujets, corrigés, fichiers \LaTeX et notions évaluées

Conseil : le jour de l'épreuve, il faut numéroter clairement les questions, justifier chaque réponse, soigner les calculs et encadrer les résultats importants.

**Exercice 1. Probabilités conditionnelles, loi binomiale et concentration****4 points**

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.

Il a été constaté que :

- 91 % du stock de tomates est commercialisable ;
- 60 % du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de 95 %.

On choisit au hasard une tomate dans le stock.

On désigne par :

- A l'événement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'événement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'événement « La tomate est commercialisable ».

Pour un événement quelconque E , on note $P(E)$ la probabilité de E .

Partie A

1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.

**Corrigé****Arbre pondéré et probabilités conditionnelles**

Dans un arbre pondéré :

- la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin ;
- une branche secondaire porte une probabilité conditionnelle.

- D'après l'énoncé :

$$P(A) = 0,60 \quad \text{et} \quad P(C) = 0,91.$$

Comme les tomates proviennent soit du fournisseur A, soit du fournisseur B, les événements A et B forment une partition de l'univers. On a donc :

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0,60 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B) = 0,40}$$

De plus :

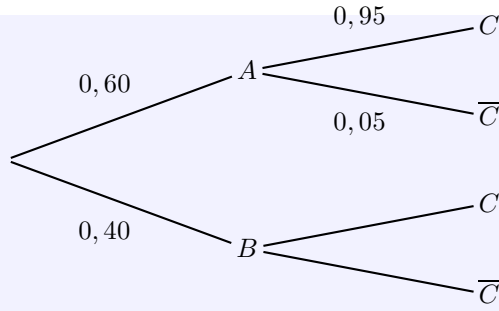
$$P_A(C) = 0,95.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P_A(\bar{C}) &= 1 - P_A(C) \\ &= 1 - 0,95 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_A(\bar{C}) = 0,05}$$

- Les probabilités conditionnelles sachant B ne sont pas demandées ici.
- L'arbre complété est donc :



2.
2. a. Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A.



Corrigé



Probabilité d'une intersection

Si A et C sont deux événements avec $P(A) \neq 0$, alors :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C).$$

On cherche la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A, c'est-à-dire :

$$P(A \cap C).$$

D'après l'arbre :

$$P(A) = 0,60 \quad \text{et} \quad P_A(C) = 0,95.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= P(A) \times P_A(C) \\ &= 0,60 \times 0,95 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap C) = 0,57}$$

La probabilité demandée est donc 0,57.

2. b. Démontrer que $P_B(C) = 0,85$.

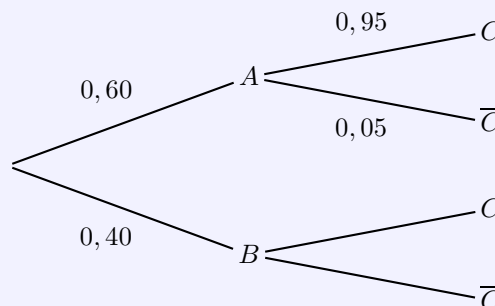


Corrigé

Les événements A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ &= P(A) \times P_A(C) + P(B) \times P_B(C). \end{aligned}$$

On a :



Puisque 91 % du stock de tomates est commercialisable on a $P(C) = 0,91$.



Ainsi :

$$\begin{aligned} 0,91 &= 0,60 \times 0,95 + 0,40 \times P_B(C) \\ &= 0,57 + 0,40 \times P_B(C) \\ \Leftrightarrow 0,91 - 0,57 &= 0,40 \times P_B(C) \\ \Leftrightarrow 0,34 &= 0,40 \times P_B(C) \\ \Leftrightarrow P_B(C) &= \frac{0,34}{0,40} \\ \boxed{P_B(C) = 0,85} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{P_B(C) = 0,85.}$$

2. c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?



Corrigé

On sait que la tomate choisie est non commercialisable. On doit donc comparer :

$$P_{\overline{C}}(A) \quad \text{et} \quad P_{\overline{C}}(B).$$

- Calcul de $P(A \cap \overline{C})$.
D'après l'arbre :

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{C}) &= P(A) \times P_A(\overline{C}) \\ &= 0,60 \times 0,05 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap \overline{C}) = 0,03}$$

- Calcul de $P(B \cap \overline{C})$.
D'après l'arbre :

$$\begin{aligned} P(B \cap \overline{C}) &= P(B) \times P_B(\overline{C}) \\ &= 0,40 \times 0,15 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B \cap \overline{C}) = 0,06}$$

- Comparaison des probabilités conditionnelles.
On sait que :

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,91 = 0,09.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_{\overline{C}}(A) &= \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \\ &= \frac{0,03}{0,09} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\overline{C}}(A) = \frac{1}{3}}$$



et :

$$P_{\overline{C}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$$
$$= \frac{0,06}{0,09}$$

$$P_{\overline{C}}(B) = \frac{2}{3}$$

On constate que :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}.$$

Ainsi, sachant que la tomate choisie est non commercialisable, la probabilité qu'elle provienne du fournisseur A est bien deux fois plus petite que la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B.

Le responsable des achats a raison.

Partie B

On rappelle que 9 % des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

1. a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.



Corrigé



Loi binomiale

Une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsqu'elle compte le nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli, la probabilité du succès étant p .

On note alors :

$$X \sim \mathcal{B}(n; p).$$

Ici, on prélève 15 tomates de manière indépendante, et on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère comme succès l'événement :

« la tomate est non commercialisable ».

D'après l'énoncé, la probabilité de succès est :

$$p = 0,09.$$

Ainsi :

$$X \sim \mathcal{B}(15; 0,09).$$



1. b. Déterminer la probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millième.



Corrigé

On cherche :

$$P(X = 2).$$

Comme $X \sim \mathcal{B}(15; 0,09)$, on utilise la formule de la loi binomiale :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{15}{2} (0,09)^2 (1 - 0,09)^{15-2} \\ &= \binom{15}{2} (0,09)^2 (0,91)^{13} \\ &\approx 0,2495815. \end{aligned}$$

Arrondie au millième :

$$P(X = 2) \approx 0,250$$

1. c. Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.
On donnera la valeur arrondie au millième.



Corrigé

L'événement « au plus deux tomates sont non commercialisables » correspond à :

$$X \leq 2.$$

On calcule donc :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

La calculatrice donne, arrondie au millième :

$$P(X \leq 2) \approx 0,853$$



2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc :

$$F_n = \frac{X_n}{n}.$$

On admet que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,09$.

2. a. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n .



Corrigé



Espérance et variance d'une variable affine

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.

Pour tous réels a et b , on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

et :

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

En particulier :

$$E(aX) = aE(X) \quad \text{et} \quad V(aX) = a^2V(X).$$



Espérance et variance d'une loi binomiale

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p).$$

On sait que :

$$X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,09).$$

- **Calcul de l'espérance de X_n .**

D'après la formule de l'espérance d'une loi binomiale :

$$E(X_n) = n \times 0,09$$

$$E(X_n) = 0,09n$$

- **Calcul de la variance de X_n .**

D'après la formule de la variance d'une loi binomiale :

$$V(X_n) = n \times 0,09 \times (1 - 0,09)$$

$$= n \times 0,09 \times 0,91$$

$$V(X_n) = 0,0819n$$

- **Passage de X_n à la fréquence F_n .**

On a :

$$F_n = \frac{X_n}{n}.$$

On utilise donc les propriétés :

$$E(aX) = aE(X) \quad \text{et} \quad V(aX) = a^2V(X),$$



avec :

$$a = \frac{1}{n}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(F_n) &= E\left(\frac{X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}E(X_n) \\ &= \frac{1}{n} \times 0,09n \end{aligned}$$

$$\boxed{E(F_n) = 0,09}$$

De même :

$$\begin{aligned} V(F_n) &= V\left(\frac{X_n}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \times 0,0819n \end{aligned}$$

$$\boxed{V(F_n) = \frac{0,0819}{n}}$$

2. b. Démontrer que

$$P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}.$$



Corrigé



Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit Y une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(Y)$.Pour tout réel $\delta > 0$, on a :

$$P(|Y - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(Y)}{\delta^2}.$$

D'après la question précédente :

$$E(F_n) = 0,09 \quad \text{et} \quad V(F_n) = \frac{0,0819}{n}.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} 0,04 < F_n < 0,14 &\iff -0,05 < F_n - 0,09 < 0,05 \\ &\iff |F_n - 0,09| < 0,05. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire F_n avec :

$$\mu = 0,09 \quad \text{et} \quad \delta = 0,05.$$



On obtient :

$$\begin{aligned} P(|F_n - 0,09| \geq 0,05) &\leq \frac{V(F_n)}{0,05^2} \\ &= \frac{0,0819}{0,0025} \\ &= \frac{0,0819}{0,0025n} \end{aligned}$$

$$P(|F_n - 0,09| \geq 0,05) \leq \frac{32,76}{n}$$

Par passage à l'événement contraire :

$$\begin{aligned} P(|F_n - 0,09| < 0,05) &= 1 - P(|F_n - 0,09| \geq 0,05) \\ &\geq 1 - \frac{32,76}{n}. \end{aligned}$$

Or :

$$|F_n - 0,09| < 0,05 \iff 0,04 < F_n < 0,14.$$

Donc :

$$P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$$

2. c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables. Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.



Corrigé

Pour cet échantillon de 500 tomates, la fréquence observée de tomates non commercialisables est :

$$f = \frac{55}{500}$$

$$f = 0,11$$

On compare cette fréquence à l'intervalle :

$$]0,04; 0,14[.$$

On a :

$$0,04 < 0,11 < 0,14.$$

La fréquence observée appartient donc à l'intervalle attendu.

De plus, d'après la question précédente, pour $n = 500$:

$$\begin{aligned} P(0,04 < F_{500} < 0,14) &\geq 1 - \frac{32,76}{500} \\ &\geq 1 - 0,06552 \end{aligned}$$

$$P(0,04 < F_{500} < 0,14) \geq 0,93448$$

Ainsi, avec une probabilité au moins égale à environ 93,4 %, la fréquence de tomates non commercialisables dans un échantillon de 500 tomates appartient à l'intervalle $]0,04; 0,14[$.

Comme la fréquence observée vaut 0,11, elle appartient à cet intervalle.

Oui, le résultat observé est conforme à ce que le responsable pouvait attendre.

**Exercice 2. Fonction, suite récurrente et somme de termes****6 points****Partie A : étude du sens de variation d'une fonction**On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.**Corrigé**Pour tout réel x , on a :

$$1 + x^2 > 0,$$

donc $\sqrt{1+x^2} > 0$ et par suite $\sqrt{1+x^2} \neq 0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x \\ &\iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - x = 0 \\ &\iff x \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \sqrt{1+x^2} = 2 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 1+x^2 = 4 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 3 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{3}; 0; \sqrt{3} \right\}$$

2.

2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .Vérifier que, pour tout réel x , on a

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

**Corrigé****Dérivation d'une fonction composée**Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction \sqrt{u} est dérivable sur I et :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

On utilisera aussi :

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}.$$



On peut écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = 2x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2x \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2x(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 2(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - 2x^2(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2(1 + x^2)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2x^2}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2(1 + x^2) - 2x^2}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

2. b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .



Corrigé



Sens de variation et signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I .

Pour tout réel x , on a :

$$1 + x^2 > 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + x^2} > 0.$$

Donc :

$$(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2} > 0.$$

Comme :

$$f'(x) = \frac{2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}},$$

on obtient, pour tout réel x :

$$f'(x) > 0.$$

Ainsi :

La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

**Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}.$$

**Corrigé****Raisonnement par récurrence**

Pour démontrer qu'une propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n , on procède en trois étapes :

- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au premier rang ;
- **Hérédité** : on suppose que la propriété est vraie à un rang n fixé et on démontre qu'elle est vraie au rang suivant ;
- **Conclusion** : on conclut par le principe de récurrence.

On considère la propriété \mathcal{P}_n définie, pour tout entier naturel n , par :

$$\mathcal{P}_n : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}.$$

- **Initialisation.**

On a :

$$u_0 = 1.$$

De plus :

$$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ &= f(1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$1 \leq 1 \leq \sqrt{2} < \sqrt{3}.$$

Ainsi :

$$1 \leq u_0 \leq u_1 < \sqrt{3}.$$

La propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

- **Hérédité.**

Soit n un entier naturel. Supposons que la propriété \mathcal{P}_n soit vraie, c'est-à-dire :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}.$$

D'après la partie A, la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Comme :

$$u_n \leq u_{n+1},$$

on obtient :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}).$$

Or, par définition de la suite :

$$f(u_n) = u_{n+1} \quad \text{et} \quad f(u_{n+1}) = u_{n+2}.$$



Donc :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence donne :

$$1 \leq u_{n+1}.$$

Enfin, comme $u_{n+1} < \sqrt{3}$ et que f est strictement croissante :

$$f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3}).$$

Or :

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_{n+2} < \sqrt{3}.$$

On a donc :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}.$$

La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

• **Conclusion.**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.



Corrigé



Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée converge.

Toute suite décroissante et minorée converge.



Image d'une suite convergente par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Si une suite (u_n) d'éléments de I converge vers un réel $\ell \in I$, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

En particulier, si la suite (u_n) est définie par :

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

et si (u_n) converge vers ℓ , alors :

$$\ell = f(\ell).$$

• **Convergence de la suite.**



D'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ tel que :

$$1 \leq \ell \leq \sqrt{3}.$$

• **Identification de la limite.**

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , donc continue sur \mathbb{R} .

Comme, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

on peut appliquer le théorème du point fixe (et passer à la limite dans cette relation).

La suite (u_n) converge vers ℓ , donc la suite extraite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ .

Par continuité de f , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Par unicité de la limite :

$$\ell = f(\ell).$$

D'après la partie A, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont :

$$-\sqrt{3}, \quad 0, \quad \sqrt{3}.$$

Or :

$$1 \leq \ell \leq \sqrt{3}.$$

La seule solution possible dans cet intervalle est donc :

$$\ell = \sqrt{3}.$$

• **Conclusion.**

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}.$$

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la partie B.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie.

3. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.



Corrigé

On veut exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

• **Expression de u_{n+1}^2 .**

Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}.$$

Donc :

$$u_{n+1}^2 = \left(\frac{2u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}} \right)^2$$

$$u_{n+1}^2 = \frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}$$



- Expression de $3 - u_{n+1}^2$.

On calcule :

$$\begin{aligned} 3 - u_{n+1}^2 &= 3 - \frac{4u_n^2}{1 + u_n^2} \\ &= \frac{3(1 + u_n^2) - 4u_n^2}{1 + u_n^2} \\ &= \frac{3 + 3u_n^2 - 4u_n^2}{1 + u_n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{3 - u_{n+1}^2 = \frac{3 - u_n^2}{1 + u_n^2}}$$

- Calcul de v_{n+1} .

Ainsi :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} \\ &= \frac{\frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}}{\frac{3 - u_n^2}{1 + u_n^2}} \\ &= \frac{4u_n^2}{3 - u_n^2} \\ &= 4 \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 4v_n}$$

- Premier terme.

Comme $u_0 = 1$:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} \\ &= \frac{1}{3 - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_0 = \frac{1}{2}}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{2} \times 4^n.}$$

3. b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

pour tout entier naturel n .



Corrigé

D'après la question précédente, la suite (v_n) est géométrique de premier terme :

$$v_0 = \frac{1}{2}$$

et de raison 4.



Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{2} \times 4^n$$

Or, par définition :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

On résout alors par équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} &= \frac{1}{2} \times 4^n \\ \Leftrightarrow u_n^2 &= \frac{1}{2} \times 4^n (3 - u_n^2) \\ \Leftrightarrow u_n^2 &= 1,5 \times 4^n - 0,5 \times 4^n u_n^2 \\ \Leftrightarrow u_n^2 + 0,5 \times 4^n u_n^2 &= 1,5 \times 4^n \\ \Leftrightarrow u_n^2 (1 + 0,5 \times 4^n) &= 1,5 \times 4^n \\ \Leftrightarrow u_n^2 &= \frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n} \end{aligned}$$

D'après la question 1. de la partie B, on a $u_n \geq 1$, donc $u_n > 0$.

Ainsi :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

3. c. En déduire la limite de la suite (u_n) .



Corrigé

On utilise l'expression obtenue à la question précédente :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

Pour étudier la limite, on factorise par 4^n au dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}} \\ &= \sqrt{\frac{1,5}{\frac{1}{4^n} + 0,5}} \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \sqrt{\frac{1,5}{0,5}} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}.$$

**Partie C : étude de la convergence de la somme de termes**

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2.$$

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

```

1  from math import *
2
3  def termes (p) :
4      u = ...
5      S = 0
6      L = []
7      for i in range (p) :
8          S = ...
9          u = ...
10         L.append (S)
11     return L

```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande `L=[]` crée une liste vide ;
- la commande `L.append(S)` ajoute, à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.

**Corrigé**

On veut lister les p premiers termes de la suite (S_n) .

Comme :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2,$$

on commence avec :

$$u = u_0 = 1 \quad \text{et} \quad S = 0.$$

- **Mise à jour de la somme.**

À chaque passage dans la boucle, on ajoute le carré du terme courant :

$$S = S + u**2.$$

- **Mise à jour du terme de la suite.**

- Méthode 1 : avec la formule de récurrence (A UTILISER en PRIORITÉ)

On utilise la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

En Python, cela donne :

$$u = 2*u/\text{sqrt}(1+u**2).$$

- Méthode 2 : avec le terme général (A ÉVITER)

On utilise le terme général :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

**DANGER**

On est dans la boucle avec i qui varie de 0 à $(n - 1)$, et on a déjà ajouté le carré du terme d'indice i à S à la ligne 8, donc il faut calculer le terme suivant et donc remplacer n par $(i + 1)$.

En Python, cela donne :

```
u = sqrt((1.5*4**(i+1))/(1+0.5*4**(i+1))).
```

- **Ajout dans la liste.**

On ajoute ensuite la somme obtenue à la liste :

```
L.append(S).
```

Le script complété est donc donné ci-dessous.

```
1 from math import *
2
3 def termes(p):
4     u = 1
5     S = 0
6     L = []
7     for i in range(p):
8         S = S + u**2
9         u = 2*u/sqrt(1+u**2)
10        # ou u = sqrt((1.5*4**(i+1))/(1+0.5*4**(i+1)))
11        L.append(S)
12    return L
```

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a

$$1 \leq u_k < \sqrt{3}.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$n \leq S_n \leq 3n.$$

**Corrigé**

On part de l'encadrement valable pour tout entier naturel k :

$$1 \leq u_k < \sqrt{3}.$$

Comme les trois membres sont positifs, on peut composer par la fonction carrée qui est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ :

$$1 \leq u_k < \sqrt{3} \implies 1 \leq u_k^2 < 3.$$

Soit n un entier naturel non nul. On applique cet encadrement aux entiers :

$$k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

On obtient :

$$1 \leq u_0^2 < 3, \quad 1 \leq u_1^2 < 3, \quad \dots, \quad 1 \leq u_{n-1}^2 < 3.$$



En additionnant ces n encadrements :

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ termes}} \leq u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 < \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n \text{ termes}}$$

$$n \leq S_n < 3n.$$

On en déduit en particulier :

$$n \leq S_n \leq 3n.$$

3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.



Corrigé

D'après la question précédente, pour tout entier naturel non nul n :

$$n \leq S_n \leq 3n.$$

- **Limite de S_n .**

Comme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

et :

$$S_n \geq n,$$

on en déduit, par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

- **Limite de $\frac{S_n}{n^2}$.**

On divise l'encadrement par $n^2 > 0$:

$$\begin{aligned} n \leq S_n \leq 3n &\implies \frac{n}{n^2} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3n}{n^2} \\ &\implies \frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n}. \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0.$$

**Exercice 3. Géométrie dans l'espace, produit scalaire et distance à un plan****5 points**L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R};$$

- le plan \mathcal{P} passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1; 1; 1)$ mais pas par le point A .**Corrigé****Appartenance à une droite paramétrée**Un point $M(x_M; y_M; z_M)$ appartient à une droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

s'il existe un réel t tel que les trois coordonnées de M vérifient simultanément le système.• **Vérification pour le point C .**Pour $t = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times 0 = 1 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = 1 + 2 \times 0 = 1 \end{cases}$$

On retrouve les coordonnées de $C(1; 1; 1)$. Ainsi :

$$\boxed{C \in \Delta.}$$

• **Vérification pour le point A .**Si $A(4; 2; 2)$ appartenait à Δ , alors il existerait un réel t tel que :

$$\begin{cases} 4 = 1 + 2t \\ 2 = 1 + t \\ 2 = 1 + 2t \end{cases}$$

On résout les deux premières équations :

$$\begin{aligned} 4 = 1 + 2t &\iff 2t = 3 \\ &\iff t = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

alors que :

$$2 = 1 + t \iff t = 1.$$



On obtient deux valeurs différentes de t . Il n'existe donc aucun réel t qui vérifie simultanément les trois équations.

Ainsi :

$$A \notin \Delta.$$

2.

2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est

$$2x + y + 2z - 14 = 0.$$



Corrigé



Droite perpendiculaire à un plan et vecteur normal

Une droite est perpendiculaire à un plan lorsque son vecteur directeur est un vecteur normal à ce plan.

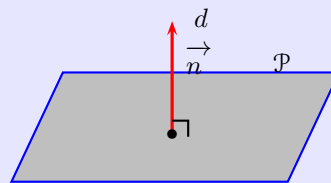
Ainsi, si une droite d a pour vecteur directeur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

et si un plan \mathcal{P} est perpendiculaire à d , alors \vec{u} est un vecteur normal à \mathcal{P} .

Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est alors de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0.$$



La droite Δ a pour vecteur directeur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le plan \mathcal{P} est perpendiculaire à la droite Δ , donc le vecteur directeur de Δ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

Ainsi, le plan \mathcal{P} admet pour vecteur normal :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne de \mathcal{P} est donc de la forme :

$$2x + y + 2z + d = 0.$$



Comme le plan \mathcal{P} passe par le point $A(4 ; 2 ; 2)$, ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$\begin{aligned}2 \times 4 + 2 + 2 \times 2 + d &= 0 \\8 + 2 + 4 + d &= 0 \\14 + d &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= -14.\end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est :

$$\boxed{2x + y + 2z - 14 = 0.}$$

2. b. Vérifier que le plan \mathcal{P} passe par le point B mais pas par le point C .



Corrigé

On utilise l'équation cartésienne du plan \mathcal{P} :

$$2x + y + 2z - 14 = 0.$$

- **Vérification pour le point $B(5 ; -2 ; 3)$.**

On calcule :

$$\begin{aligned}2x_B + y_B + 2z_B - 14 &= 2 \times 5 + (-2) + 2 \times 3 - 14 \\ &= 10 - 2 + 6 - 14 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Les coordonnées de B vérifient l'équation du plan, donc :

$$\boxed{B \in \mathcal{P}.}$$

- **Vérification pour le point $C(1 ; 1 ; 1)$.**

On calcule :

$$\begin{aligned}2x_C + y_C + 2z_C - 14 &= 2 \times 1 + 1 + 2 \times 1 - 14 \\ &= 2 + 1 + 2 - 14 \\ &= -9.\end{aligned}$$

Comme $-9 \neq 0$, les coordonnées de C ne vérifient pas l'équation du plan.

Ainsi :

$$\boxed{C \notin \mathcal{P}.}$$



3. On considère le point $D(3 ; 2 ; 3)$.

3. a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan \mathcal{P} .



Corrigé



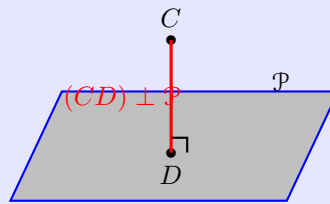
Projeté orthogonal sur un plan

Soit \mathcal{P} un plan et soit C un point.

Le point D est le projeté orthogonal de C sur le plan \mathcal{P} lorsque :

$$D \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad (CD) \perp \mathcal{P}.$$

Autrement dit, la droite (CD) est dirigée par un vecteur normal au plan \mathcal{P} .



- On vérifie que D appartient au plan \mathcal{P} .

On calcule :

$$\begin{aligned} 2x_D + y_D + 2z_D - 14 &= 2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14 \\ &= 6 + 2 + 6 - 14 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$D \in \mathcal{P}.$$

- On montre que la droite (CD) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .

On calcule les coordonnées du vecteur \overrightarrow{CD} :

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 2 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Or le plan \mathcal{P} admet pour vecteur normal :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le vecteur \overrightarrow{CD} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

Donc :

$$(CD) \perp \mathcal{P}.$$

- **Conclusion.**

Comme $D \in \mathcal{P}$ et $(CD) \perp \mathcal{P}$, le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan \mathcal{P} .

Le point D est le projeté orthogonal de C sur \mathcal{P} .



3. b. Justifier que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.



Corrigé

- **Les points A , B et D appartiennent au plan \mathcal{P} .**

Par construction, $A \in \mathcal{P}$.

D'après la question 2.b :

$$B \in \mathcal{P}.$$

D'après la question 3.a :

$$D \in \mathcal{P}.$$

- **Les points A , B et D ne sont pas alignés.**

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 4 \\ -2 - 2 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 - 4 \\ 2 - 2 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (car l'ordonnée de \overrightarrow{AD} est nulle alors que celle de \overrightarrow{AB} ne l'est pas). Donc les points A , B et D ne sont pas alignés.

Ils définissent donc le plan \mathcal{P} .

- **Le point C n'appartient pas à ce plan.**

D'après la question 2.b :

$$C \notin \mathcal{P}.$$

Ainsi, le point C n'appartient pas au plan défini par les points A , B et D .

- **Conclusion.**

Les quatre points A , B , C et D ne peuvent donc pas appartenir à un même plan.

Les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.



3. c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.



Corrigé



Produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé de l'espace, si

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

D'après la question précédente :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= 1 \times (-1) + (-4) \times 0 + 1 \times 1 \\ &= -1 + 0 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0}$$

Ainsi, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont orthogonaux.



3. d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.



Corrigé

On choisit comme base le triangle ABD .

- **Aire de la base ABD .**

D'après la question précédente :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

Donc le triangle ABD est rectangle en A .

Calculons les longueurs AB et AD avec la formule usuelle car le repère est orthonormé :

$$AB = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}$$

$$AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

et :

$$AD = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

L'aire du triangle ABD vaut donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABD} &= \frac{AB \times AD}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{ABD} = 3}$$

- **Hauteur relative à la base ABD .**

Les points A , B et D appartiennent au plan \mathcal{P} .

D'après la question 3.a, le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan \mathcal{P} .

La hauteur du tétraèdre issue de C relativement à la base ABD est donc la longueur CD .

Or :

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$CD = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$\boxed{CD = 3}$$

- **Volume du tétraèdre.**

On applique la formule :

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABD} \times CD \\ &= \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_{ABCD} = 3}$$

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est donc :

$$\boxed{3 \text{ unités de volume.}}$$



4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

4. a. Vérifier que les coordonnées du point H sont

$$\left(\frac{73}{29}; -\frac{4}{29}; \frac{51}{29} \right).$$



Corrigé



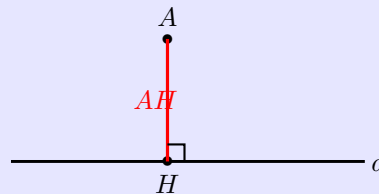
Projeté orthogonal sur une droite

Soit d une droite et soit A un point.

Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite d lorsque :

$$H \in d \quad \text{et} \quad (AH) \perp d.$$

Dans ce cas, la distance du point A à la droite d est la longueur AH .



On note :

$$H \left(\frac{73}{29}; -\frac{4}{29}; \frac{51}{29} \right).$$

- On vérifie que H appartient à la droite (BC) .

On calcule :

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 1-(-2) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} \frac{73}{29} - 5 \\ -\frac{4}{29} - (-2) \\ \frac{51}{29} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{72}{29} \\ \frac{54}{29} \\ -\frac{36}{29} \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\begin{pmatrix} -\frac{72}{29} \\ \frac{54}{29} \\ -\frac{36}{29} \end{pmatrix} = \frac{18}{29} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{BH} = \frac{18}{29} \overrightarrow{BC}.$$

Les vecteurs \overrightarrow{BH} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires, donc :

$$H \in (BC).$$

- On vérifie que (AH) est perpendiculaire à (BC) .



On calcule :

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{73}{29} - 4 \\ -\frac{4}{29} - 2 \\ \frac{51}{29} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{43}{29} \\ \frac{62}{29} \\ -\frac{7}{29} \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= -\frac{43}{29} \times (-4) - \frac{62}{29} \times 3 - \frac{7}{29} \times (-2) \\ &= \frac{172}{29} - \frac{186}{29} + \frac{14}{29} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc :

$$(AH) \perp (BC).$$

• **Conclusion.**

Comme $H \in (BC)$ et $(AH) \perp (BC)$, le point H est bien le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) .

$$H \left(\frac{73}{29}; -\frac{4}{29}; \frac{51}{29} \right).$$

4. b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est

$$\frac{3\sqrt{22}}{2}.$$



Corrigé

Comme H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) , la longueur AH est la hauteur du triangle ABC relative à la base BC .

• **Calcul de la longueur BC .**

On a :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{16 + 9 + 4} \end{aligned}$$

$$BC = \sqrt{29}$$

• **Calcul de la longueur AH .**

On a :

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -\frac{43}{29} \\ \frac{62}{29} \\ -\frac{7}{29} \end{pmatrix}.$$



Donc :

$$\begin{aligned}AH^2 &= \left(-\frac{43}{29}\right)^2 + \left(-\frac{62}{29}\right)^2 + \left(-\frac{7}{29}\right)^2 \\&= \frac{1849 + 3844 + 49}{29^2} \\&= \frac{5742}{841} \\&= \frac{198}{29}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}AH &= \sqrt{\frac{198}{29}} \\&= \sqrt{\frac{9 \times 22}{29}} \\&= \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}}\end{aligned}$$

• Calcul de l'aire du triangle ABC .

On utilise la formule :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC} &= \frac{\sqrt{29} \times \frac{3\sqrt{22}}{\sqrt{29}}}{2} \\&= \frac{3\sqrt{22}}{2}\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{22}}{2}.$$



4. c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .



Corrigé

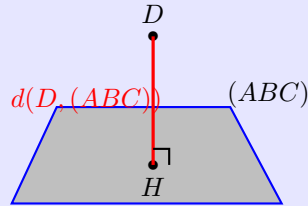


Distance d'un point à un plan et volume d'un tétraèdre

La distance d'un point D à un plan (ABC) est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ relative à la base ABC .

Ainsi :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d(D, (ABC)).$$



D'après la question 3.d :

$$V_{ABCD} = 3.$$

D'après la question 4.b :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{22}}{2}.$$

On note d la distance du point D au plan (ABC) .

On applique la formule du volume :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d$$

$$3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times d$$

$$3 = \frac{\sqrt{22}}{2} d$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{6}{\sqrt{22}}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{6\sqrt{22}}{22}$$

$$\boxed{d = \frac{3\sqrt{22}}{11}}$$

Ainsi :

La distance du point D au plan (ABC) est $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

**Exercice 4. Fonction logarithme, variations, intégration par parties****5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

**Corrigé****Propriété 1** (Limites liées à la fonction logarithme)

- (1) limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

- (2) croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

- (3) (nombre dérivé en 1) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On rappelle que :

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{par produit}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.

2. a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a

$$f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2.$$

**Corrigé**

Soit $x > 0$.

On a :

$$g(x) = x \ln x.$$

Donc :

$$\begin{aligned} g(\sqrt{x}) &= \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{x} \times \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \ln x \\ &= \frac{\sqrt{x} \ln x}{2}. \end{aligned}$$



On en déduit :

$$\begin{aligned} 4(g(\sqrt{x}))^2 &= 4\left(\frac{\sqrt{x} \ln x}{2}\right)^2 \\ &= 4 \times \frac{x(\ln x)^2}{4} \\ &= x(\ln x)^2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$$

2. b. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



Corrigé

Propriété 2 (Limites liées à la fonction logarithme)

• (1) limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

• (2) croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

• (3) (nombre dérivé en 1) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

D'après la question précédente, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$$

avec :

$$g(t) = t \ln t.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a :

$$\sqrt{x} \rightarrow 0^+.$$

De plus, d'après les croissances comparées :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{par composition}} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(\sqrt{x}) = 0.$$

Puis :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(\sqrt{x}) = 0 \\ f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{par produit et puissance}} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$



3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. a. Démontrer que sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x).$$



Corrigé



Dérivation d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors la fonction uv est dérivable sur I et :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

La fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On pose :

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = (\ln x)^2.$$

Alors :

$$u'(x) = 1$$

et :

$$\begin{aligned} v'(x) &= 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \\ &= \frac{2 \ln x}{x}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln x)^2 + x \times \frac{2 \ln x}{x} \\ &= (\ln x)^2 + 2 \ln x \\ &= \ln x(\ln x + 2). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$$

3. b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



Corrigé

On sait que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x).$$

- **Recherche des zéros de f' .**

On résout :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (\ln x)(2 + \ln x) = 0 \\ &\iff \ln x = 0 \quad \text{ou} \quad 2 + \ln x = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad \ln x = -2 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = e^{-2}. \end{aligned}$$

- **Signe de f' .**

On étudie le signe des facteurs $\ln x$ et $2 + \ln x$.

$$\ln x < 0 \iff 0 < x < 1 \quad \text{et} \quad \ln x > 0 \iff x > 1.$$



De plus :

$$2 + \ln x < 0 \iff \ln x < -2 \iff x < e^{-2}.$$

On obtient donc :

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]0; e^{-2}[,$$

$$f'(x) < 0 \text{ sur }]e^{-2}; 1[,$$

et :

$$f'(x) > 0 \text{ sur }]1; +\infty[.$$

• **Valeurs utiles.**

D'après la question 2.b :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

De plus :

$$\begin{aligned} f(e^{-2}) &= e^{-2} (\ln(e^{-2}))^2 \\ &= e^{-2} \times (-2)^2 \end{aligned}$$

$$f(e^{-2}) = \frac{4}{e^2}$$

et :

$$f(1) = 1 \times (\ln 1)^2$$

$$f(1) = 0$$

Enfin, d'après la question 1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$		
Signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+
Variations de f	0	$\frac{4}{e^2}$	0	$+\infty$		

Ainsi, la fonction f est :

croissante sur $]0; e^{-2}[$,
 décroissante sur $]e^{-2}; 1[$,
 croissante sur $]1; +\infty[$.

3. c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1]$.



Corrigé

D'après le tableau de variations, sur l'intervalle $]0; 1]$, la fonction f admet donc un maximum en $x = e^{-2}$ soit

$$f(e^{-2}) = \frac{4}{e^2}.$$

Ainsi :

Le maximum de f sur $]0; 1]$ est $\frac{4}{e^2}$.



4. On considère l'équation $f(x) = 2$.

4. a. Justifier que, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.



Corrigé

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a ; b]$.

Remarque 1 : *Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

Remarque 2 : *On a longtemps pensé que la réciproque du théorème était vraie, et que la propriété des valeurs intermédiaires caractérisait les fonctions continues. Ce n'est qu'en 1875 que Darboux en donna un contre-exemple dans son article "Mémoire sur les fonctions discontinues".*



x	0	e^{-2}	1	α	$+\infty$
Variations de f	0	$\frac{4}{e^2} \approx 0.54$	0	2	$+\infty$

- **Absence de solution sur $]0 ; 1]$.**

D'après la question précédente, le maximum de f sur $]0 ; 1]$ est :

$$\frac{4}{e^2}.$$

Or :

$$\frac{4}{e^2} \approx 0,541 < 2.$$

Donc, pour tout $x \in]0 ; 1]$:

$$f(x) < 2.$$

L'équation $f(x) = 2$ n'admet donc aucune solution sur $]0 ; 1]$.

- **Existence et unicité sur $[1 ; +\infty[$.**

La fonction f est continue sur $[1 ; +\infty[$ car elle est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

D'après le tableau de variations, la fonction f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

De plus :

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Comme :

$$0 < 2 < +\infty,$$

le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1 ; +\infty[$.

On la note α .

- **Conclusion.**

Comme il n'y a aucune solution sur $]0 ; 1]$ et une unique solution sur $[1 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0 ; +\infty[$.

L'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.



4. b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0, 1.



Corrigé

On utilise la fonction :

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On a :

$$\begin{cases} f(2,4) = 2,4(\ln(2,4))^2 \approx 1,839 < 2. \\ f(2,5) = 2,5(\ln(2,5))^2 \approx 2,099 > 2 \end{cases}$$

Comme la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$, et comme α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$, on obtient :

$$\boxed{2,4 < \alpha < 2,5.}$$

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.

5. a. Donner une interprétation géométrique de

$$\int_a^1 f(x) dx.$$



Corrigé

Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = x(\ln x)^2 \geq 0.$$

Donc, sur l'intervalle $[a; 1]$, la courbe de f est située au-dessus de l'axe des abscisses.

Ainsi :

$$\int_a^1 f(x) dx$$

représente l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre :

- la courbe représentative de f ;
- l'axe des abscisses ;
- les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = 1$.

$$\boxed{\int_a^1 f(x) dx \text{ est l'aire sous la courbe de } f \text{ entre } a \text{ et } 1.}$$



5. b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_1^a x \ln x dx.$$



Corrigé



Remarque importante

La formule imprimée dans l'énoncé semble comporter une coquille de signe.

L'intégration par parties donne :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx.$$

De façon équivalente, comme

$$-\int_a^1 x \ln x dx = \int_1^a x \ln x dx,$$

on peut écrire :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \int_1^a x \ln x dx.$$

C'est cette dernière égalité qui est cohérente avec la question suivante.



Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

On rappelle que :

$$f(x) = x(\ln x)^2.$$

On effectue une intégration par parties sur l'intervalle $[a; 1]$ en posant :

$$u(x) = (\ln x)^2 \quad \text{et} \quad v'(x) = x.$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_a^1 x(\ln x)^2 dx &= \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2 \ln x}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 x \ln x dx. \end{aligned}$$

Or :

$$\ln 1 = 0.$$



Donc :

$$\begin{aligned} \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 &= \frac{1^2}{2} (\ln 1)^2 - \frac{a^2}{2} (\ln a)^2 \\ &= -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x dx$$

$$\boxed{\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \int_1^a x \ln x dx}$$

5. c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$



Corrigé

On utilise la formule corrigée et cohérente avec la question précédente :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \int_1^a x \ln x dx.$$

Il reste à calculer :

$$\int_1^a x \ln x dx.$$

On effectue une intégration par parties en posant :

$$u(x) = \ln x \quad \text{et} \quad v'(x) = x.$$

Alors :

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^a x \ln x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^a - \int_1^a \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^a - \int_1^a \frac{x}{2} dx. \end{aligned}$$

Or :

$$\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^a = \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{a^2}{2} \ln a.$$

Et :

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{x}{2} dx &= \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^a \\ &= \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_1^a x \ln x \, dx &= \frac{a^2}{2} \ln a - \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_a^1 f(x) \, dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\int_a^1 f(x) \, dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}}$$

5. d. Déterminer la limite de

$$\int_a^1 f(x) \, dx$$

quand a tend vers 0.



Corrigé

D'après la question précédente :

$$\int_a^1 f(x) \, dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

On utilise les croissances comparées lorsque $a \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^2(\ln a)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 \ln a = 0.$$

De plus :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(x) \, dx = -\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times 0$$

$$\boxed{\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(x) \, dx = \frac{1}{4}}$$

↩ **Fin du devoir** ↪