



Math93.com

Baccalauréat 2026 - Spécialité Maths

Correction Centres Étrangers

Sujet 1 - 10 Juin 2026

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Mathématiques

Spécialité Mathématiques

Corrigé détaillé

Centres Étrangers – 10 Juin 2026
Sujet 1

SESSION
2026

DURÉE
4 heures

BARÈME
20 points

Exercice	Thème principal	Points
Exercice 1	Probabilités, loi binomiale et concentration	5 points
Exercice 2	Vrai-Faux : équation différentielle, fonctions et suites	5 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	4 points
Exercice 4	Fonction logarithme, convexité et intégration	6 points
Total	Sujet complet	20 points



Bac 2026

Tous les sujets, corrigés, fichiers \LaTeX et bilans de notions de la session 2026 sont disponibles sur la page mère :

Annales Bac Maths 2026 – sujets, corrigés, fichiers \LaTeX et notions évaluées

Conseil : le jour de l'épreuve, il faut numéroter clairement les questions, justifier chaque réponse, soigner les calculs et encadrer les résultats importants.

**Exercice 1. Probabilités, loi binomiale et concentration****5 points**

La fédération internationale d'escrime établit des normes de fabrication sur les lames des armes des tireurs afin de garantir au maximum leur sécurité.

Pour tester la conformité de l'acier employé, la lame est pliée puis redressée toutes les secondes jusqu'à la rupture. La lame est conforme si la rupture intervient après plus de cinq heures de test.

Un équipementier d'escrime se fournit auprès de trois fabricants de lames. Son stock est composé de 60 % de lames du fournisseur A , de 12 % de lames du fournisseur B , le reste venant du fournisseur C .

Une étude qualité a montré que :

- 90 % des lames du fournisseur A étaient conformes ;
- 95 % des lames du fournisseur B étaient conformes ;
- 85 % des lames du fournisseur C étaient conformes.

Partie A

Un contrôle est déclenché sur une des lames vendues par l'équipementier.

On considère les événements suivants :

- A : « La lame testée provient du fournisseur A » ;
- B : « La lame testée provient du fournisseur B » ;
- C : « La lame testée provient du fournisseur C » ;
- T : « La lame testée est conforme ».

On note \bar{T} l'événement contraire de T .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous représentant la situation.

**Corrigé****Compléter un arbre de probabilités**

Sur un arbre de probabilités :

- la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;
- si A et B sont deux événements, alors la probabilité du chemin $A \cap B$ est :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

- **Première ramification.**

On sait que :

$$P(A) = 0,6 \quad \text{et} \quad P(B) = 0,12.$$

Le reste du stock provient du fournisseur C , donc :

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(A) - P(B) \\ &= 1 - 0,6 - 0,12 \\ &= 0,28. \end{aligned}$$

- **Branches de conformité.**

On lit dans l'énoncé :

$$P_A(T) = 0,9, \quad P_B(T) = 0,95, \quad P_C(T) = 0,85.$$



On complète alors par complément à 1 :

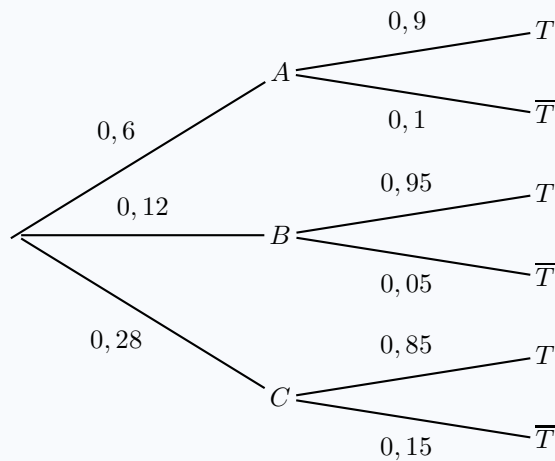
$$\begin{aligned} P_A(\bar{T}) &= 1 - P_A(T) \\ &= 1 - 0,9 \\ &= 0,1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_B(\bar{T}) &= 1 - P_B(T) \\ &= 1 - 0,95 \\ &= 0,05, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_C(\bar{T}) &= 1 - P_C(T) \\ &= 1 - 0,85 \\ &= 0,15. \end{aligned}$$

On obtient donc l'arbre complété suivant :



2. Déterminer $P(A \cap \bar{T})$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.



Corrigé

L'événement $A \cap \bar{T}$ correspond à l'événement :

« la lame provient du fournisseur A et n'est pas conforme ».

D'après l'arbre :

$$P(A) = 0,6 \quad \text{et} \quad P_A(\bar{T}) = 0,1.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{T}) &= P(A) \times P_A(\bar{T}) \\ &= 0,6 \times 0,1 \\ &= 0,06. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap \bar{T}) = 0,06}$$

Interprétation. La probabilité qu'une lame choisie au hasard provienne du fournisseur A et ne soit pas conforme est égale à 0,06, c'est-à-dire 6 %.



3. Démontrer que la probabilité que la lame testée soit conforme est de 0,892.

 **Corrigé**



Formule des probabilités totales

Si les événements A , B et C forment une partition de l'univers, alors pour tout événement T :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T).$$

Avec un arbre, cela revient à additionner les probabilités des chemins qui mènent à l'événement T .

Les événements A , B et C forment une partition de l'univers, puisqu'une lame provient d'un seul des trois fournisseurs.

Ainsi :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T).$$

Or :

$$\begin{aligned} P(A \cap T) &= P(A) \times P_A(T) \\ &= 0,6 \times 0,9 \\ &= 0,54, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B \cap T) &= P(B) \times P_B(T) \\ &= 0,12 \times 0,95 \\ &= 0,114, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(C \cap T) &= P(C) \times P_C(T) \\ &= 0,28 \times 0,85 \\ &= 0,238. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(T) &= 0,54 + 0,114 + 0,238 \\ &= 0,892. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T) = 0,892}$$



4. Sachant que la lame testée n'est pas conforme, déterminer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B .
On donnera la valeur arrondie au millième.

 **Corrigé**

On cherche :

$$P_{\overline{T}}(B).$$

**Probabilité conditionnelle**

Si E et F sont deux événements avec $P(F) \neq 0$, alors :

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

On a :

$$P(T) = 0,892.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(\overline{T}) &= 1 - P(T) \\ &= 1 - 0,892 \\ &= 0,108. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} P(B \cap \overline{T}) &= P(B) \times P_B(\overline{T}) \\ &= 0,12 \times 0,05 \\ &= 0,006. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_{\overline{T}}(B) &= \frac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} \\ &= \frac{0,006}{0,108} \\ &= \frac{6}{108} \approx 0,056. \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\overline{T}}(B) \approx 0,056}$$



Partie B

D'après la partie A, la probabilité qu'une lame de l'équipementier ne soit pas conforme est égale à 0,108.

Lors d'une compétition d'escrime, l'équipementier apporte un échantillon de 75 lames provenant de son stock. On considère qu'il les a choisies au hasard et de manière indépendante. De plus, son stock de lames est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de lames non conformes dans cet échantillon.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.



Corrigé



Épreuve de Bernoulli et loi binomiale

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui possède exactement deux issues :

- le **succès**, de probabilité p ;
- l'**échec**, de probabilité $1 - p$.

Lorsqu'on répète n fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli, on obtient un **schéma de Bernoulli**. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus au cours de ces n répétitions suit alors une **loi binomiale** de paramètres n et p , notée :

$$X \sim \mathcal{B}(n ; p).$$

Dans ce cas, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- **Modélisation par une épreuve de Bernoulli.**

Pour chaque lame choisie, on considère l'expérience aléatoire suivante :

« la lame est-elle non conforme ? »

Cette expérience possède deux issues :

- le succès : « la lame est non conforme » ;
- l'échec : « la lame est conforme ».

C'est donc une épreuve de Bernoulli, dont la probabilité de succès est :

$$p = P(\overline{T}) = 0,108.$$

- **Répétition indépendante de la même épreuve.**

L'équipementier choisit 75 lames dans son stock.

On répète donc 75 fois la même épreuve de Bernoulli, puisque chaque lame est choisie dans le même stock et a donc la même probabilité 0,108 d'être non conforme.

De plus, l'énoncé précise que le choix des lames est fait au hasard et de manière indépendante. Le stock étant suffisamment grand, ce choix est assimilé à un tirage avec remise, ce qui justifie l'indépendance des épreuves.

- **Conclusion.**

La variable aléatoire X compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de lames non conformes parmi les 75 lames choisies.

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres :

$$n = 75 \quad \text{et} \quad p = 0,108.$$

Donc :

$$X \sim \mathcal{B}(75 ; 0,108)$$



2. Calculer la probabilité que 6 lames exactement soient non conformes dans cet échantillon.
On arrondira le résultat au millième.

 **Corrigé**

Comme :

$$X \sim \mathcal{B}(75 ; 0,108),$$

on a :

$$P(X = 6) = \binom{75}{6} (0,108)^6 (1 - 0,108)^{75-6}.$$

Donc :

$$P(X = 6) = \binom{75}{6} (0,108)^6 (0,892)^{69}.$$

Avec la calculatrice on obtient :

$$P(X = 6) \approx 0,1201405779.$$

Donc, au millième :

$$P(X = 6) \approx 0,120$$

3. L'équipementier affirme que la probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes dans cet échantillon est inférieure à 50 %.

A-t-il raison ?

 **Corrigé**

On cherche :

$$P(X > 8).$$

Comme X est une variable aléatoire à valeurs entières :

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8).$$

Avec la calculatrice on obtient :

$$P(X > 8) \approx 0,4220787816.$$

Donc :

$$P(X > 8) \approx 0,422 < 0,5.$$

La probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes est donc bien inférieure à 50 %.

L'équipementier a raison.

**Partie C**

Soit n un entier strictement positif désignant le nombre de compétitions durant lesquelles l'équipementier est présent. Il apporte à chaque fois un échantillon de 75 lames. Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n , que l'on considère indépendantes, donnent pour chaque échantillon le nombre de lames non conformes.

On pose :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer l'espérance $E(M_n)$ et la variance $V(M_n)$ de la variable aléatoire M_n .

**Corrigé****Espérance et variance d'une loi binomiale**

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N ; p)$, alors :

$$E(X) = Np \quad \text{et} \quad V(X) = Np(1 - p).$$

**Espérance et variance d'une transformation affine**

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, et si a et b sont deux réels, alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Pour la variance, on a :

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

En particulier :

$$E(aX) = aE(X) \quad \text{et} \quad V(aX) = a^2V(X).$$

**Somme de variables aléatoires**

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires admettant une espérance, alors :

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n).$$

Si, de plus, X_1, \dots, X_n sont indépendantes, alors :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

- **Espérance et variance de chaque variable X_i .**

Pour tout entier i compris entre 1 et n , la variable aléatoire X_i donne le nombre de lames non conformes dans un échantillon de 75 lames.

D'après la partie B, chaque variable X_i suit donc la loi binomiale :

$$X_i \sim \mathcal{B}(75 ; 0,108).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 75 \times 0,108 \\ &= 8,1. \end{aligned}$$



De plus :

$$\begin{aligned} V(X_i) &= 75 \times 0,108 \times (1 - 0,108) \\ &= 75 \times 0,108 \times 0,892 \\ &= 7,2252. \end{aligned}$$

• **Espérance de M_n .**

On a :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n} (E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)) \\ &= \frac{1}{n} \times n \times 8,1 \\ &= 8,1. \end{aligned}$$

• **Variance de M_n .**

Les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes d'après l'énoncé.

Donc :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n).$$

Or :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

On utilise donc la propriété :

$$V(aX) = a^2V(X).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} V(M_n) &= V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} (V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)) \\ &= \frac{1}{n^2} \times n \times 7,2252 \\ &= \frac{7,2252}{n}. \end{aligned}$$

• **Conclusion.**

$$E(M_n) = 8,1 \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{7,2252}{n}$$



2. Justifier l'inégalité suivante, pour tout entier naturel n non nul :

$$P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}.$$



Corrigé



Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit Y une variable aléatoire admettant une espérance $E(Y)$ et une variance $V(Y)$.
Alors, pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|Y - E(Y)| \geq \delta) \leq \frac{V(Y)}{\delta^2}.$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n .
D'après la question précédente :

$$E(M_n) = 8,1 \quad \text{et} \quad V(M_n) = \frac{7,2252}{n}.$$

On choisit :

$$\delta = 2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(|M_n - 8,1| \geq 2) &= P(|M_n - E(M_n)| \geq 2) \\ &\leq \frac{V(M_n)}{2^2} \\ &= \frac{7,2252}{4} \\ &\leq \frac{n}{4} \\ &\leq \frac{7,2252}{4n} \\ &\leq \frac{1,8063}{n}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}$$



3. Déterminer une valeur de l'entier n à partir de laquelle

$$P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

On sait que :

$$P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}.$$

Par passage à l'événement contraire :

$$P(|M_n - 8,1| < 2) = 1 - P(|M_n - 8,1| \geq 2).$$

Donc :

$$P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 1 - \frac{1,8063}{n}.$$

On veut donc que :

$$1 - \frac{1,8063}{n} \geq 0,95.$$

Comme n est un entier strictement positif, on résout :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1,8063}{n} \geq 0,95 &\iff -\frac{1,8063}{n} \geq -0,05 \\ &\iff \frac{1,8063}{n} \leq 0,05 \\ &\iff 1,8063 \leq 0,05n \\ &\iff n \geq \frac{1,8063}{0,05} \\ &\iff n \geq 36,126. \end{aligned}$$

Comme n est un entier, il suffit donc de prendre :

$$n = 37.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 37$, on a :

$$P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95.$$

Interprétation. À partir de 37 compétitions, la probabilité que le nombre moyen de lames non conformes par échantillon de 75 lames soit à moins de 2 de 8,1 est au moins égale à 0,95.

Autrement dit, à partir de 37 compétitions, il y a au moins 95 % de chances que cette moyenne soit comprise entre :

$$8,1 - 2 = 6,1 \quad \text{et} \quad 8,1 + 2 = 10,1.$$

À partir de 37 compétitions.

**Exercice 2. Vrai-Faux : équation différentielle, fonctions et suites****5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle suivante où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur \mathbb{R} :

$$(E) : y' + y = 2 \cos(x).$$

AFFIRMATION 1 : La fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 4e^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

**Corrigé**

Pour vérifier si f est solution de l'équation différentielle (E), on calcule $f'(x) + f(x)$.

On a pour x réel :

$$f(x) = 4e^{-x} + \cos(x) + \sin(x).$$

Donc f est bien dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$f'(x) = -4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x).$$

Ainsi pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= (-4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x)) + (4e^{-x} + \cos(x) + \sin(x)) \\ &= 2 \cos(x). \end{aligned}$$

Donc f vérifie bien :

$$f'(x) + f(x) = 2 \cos(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle (E).

L'affirmation 1 est VRAIE.

2. On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(x).$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère et \mathcal{C}_g celle de la fonction g .

AFFIRMATION 2 : Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont un seul point d'intersection.

**Corrigé**

Les abscisses des points d'intersection des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont les éventuelles solutions de l'équation :

$$f(x) = g(x).$$

On doit donc résoudre :

$$2x = \sin(x).$$

On introduit la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = 2x - \sin(x).$$

Ainsi :

$$2x = \sin(x) \iff h(x) = 0.$$

**Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation

$$f(x) = k$$

admet une **unique** solution dans $[a ; b]$.

- **Variations de h sur \mathbb{R} .**

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} , donc continue sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x :

$$h'(x) = 2 - \cos(x).$$

Or :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

Donc :

$$h'(x) = 2 - \cos(x) \geq 1 > 0.$$

Ainsi, h est strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus :

$$h(-\pi) = 2(-\pi) - \sin(-\pi) = -2\pi,$$

$$h(0) = 0,$$

et

$$h(\pi) = 2\pi - \sin(\pi) = 2\pi.$$

On peut résumer la situation par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\pi$	0	π	$+\infty$
$h'(x)$			+		
h		-2π	0	2π	

- **Application du corollaire du TVI sur $[-\pi ; \pi]$.**

La fonction h est continue et strictement croissante sur $[-\pi ; \pi]$.

De plus :

$$h(-\pi) = -2\pi < 0 \quad \text{et} \quad h(\pi) = 2\pi > 0.$$

Ainsi, 0 est compris entre $h(-\pi)$ et $h(\pi)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation :

$$h(x) = 0$$

admet une unique solution dans $[-\pi ; \pi]$.

Or :

$$h(0) = 0.$$

Cette solution est donc :

$$x = 0.$$



- **Unicité sur \mathbb{R} .**

Comme h est strictement croissante sur \mathbb{R} , l'équation $h(x) = 0$ admet au plus une solution sur \mathbb{R} .

Or on vient de trouver la solution $x = 0$.

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} :

$$x = 0.$$

- **Conclusion.**

Ainsi, l'équation :

$$2x = \sin(x)$$

admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ont donc un seul point d'intersection, de coordonnées :

$$(0 ; 0).$$

L'affirmation 2 est VRAIE.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n + 1}.$$

AFFIRMATION 3 : La suite (v_n) diverge.



Corrigé



Théorème d'encadrement

Soient (a_n) , (u_n) et (b_n) trois suites réelles telles que, à partir d'un certain rang :

$$a_n \leq u_n \leq b_n.$$

Si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{2n + \sin(n)}{n + 1} \\ &= \frac{n \left(2 + \frac{\sin(n)}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= \frac{2 + \frac{\sin(n)}{n}}{1 + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1.$$



Donc :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Comme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$



Théorème d'encadrement

Soient (a_n) , (u_n) et (b_n) trois suites réelles telles que, à partir d'un certain rang :

$$a_n \leq u_n \leq b_n.$$

Si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Or :

$$v_n = \frac{2 + \frac{\sin(n)}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

On a :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\sin(n)}{n}\right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{par quotient}} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2.$$

La suite (v_n) converge donc vers 2.
Elle n'est donc pas divergente.

L'affirmation 3 est FAUSSE.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

AFFIRMATION 4 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n^2.$$



Corrigé

On démontre l'affirmation par récurrence.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la propriété :

$$P(n) : u_n = n^2.$$

- **Initialisation.**

Pour $n = 1$, on a :

$$u_1 = 1.$$

Or :

$$1^2 = 1.$$



Donc :

$$u_1 = 1^2.$$

La propriété $P(1)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

On suppose donc que :

$$u_n = n^2.$$

D'après la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2. \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

• **Conclusion.**

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire.

Donc, par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = n^2.$$

L'affirmation 4 est VRAIE.

5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = e^{-n}.$$

On pose, pour tout entier naturel n :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

AFFIRMATION 5 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e - 1}.$$



Corrigé



Suite géométrique

Une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} est dite **géométrique** lorsqu'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

Le réel q est appelé la **raison** de la suite.

**Somme des termes d'une suite géométrique**

Si $q \neq 1$, alors :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

De plus, si $-1 < q < 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

- **Nature de la suite (u_n) .**

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e^{-(n+1)} \\ &= e^{-n-1} \\ &= e^{-n} \times e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} u_n. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme :

$$u_0 = e^0 = 1$$

et de raison :

$$q = \frac{1}{e}.$$

- **Expression de S_n .**

On a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Comme (u_n) est géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{e}$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{e}\right)^n \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}}. \end{aligned}$$

- **Passage à la limite.**

Comme $e > 1$, on a :

$$0 < \frac{1}{e} < 1.$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = 0.$$

On a alors :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right) = 1 \\ 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{par quotient}} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}}.$$



Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \frac{1}{e}} &= \frac{1}{\frac{e-1}{e}} \\ &= \frac{e}{e-1}.\end{aligned}$$

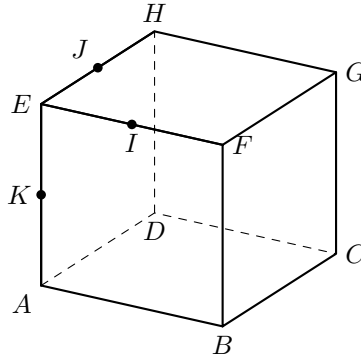
Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e-1}.$$

• **Conclusion.**

L'affirmation est vraie.

L'affirmation 5 est VRAIE.

**Exercice 3. Géométrie dans l'espace****4 points**On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.On munit l'espace du repère orthonormal $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.Soit I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu de $[EH]$ et K le milieu de $[AE]$.

1. Donner les coordonnées des points I , J et K .

**Corrigé**Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a :

$$E(0; 0; 1), \quad F(1; 0; 1), \quad H(0; 1; 1).$$

**Milieu d'un segment dans l'espace**Si $M(x_M; y_M; z_M)$ et $N(x_N; y_N; z_N)$, alors le milieu P de $[MN]$ a pour coordonnées :

$$P\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2}\right).$$

Ainsi :

$$I\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{1+1}{2}\right),$$

donc :

$$I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right).$$

De même :

$$J\left(0; \frac{1}{2}; 1\right) \quad \text{et} \quad K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right), \quad J\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \quad K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)}$$



2.

2. a. Déterminer la valeur du produit scalaire $\vec{AI} \cdot \vec{AJ}$.

Corrigé

Les vecteurs \vec{AI} et \vec{AJ} ont pour coordonnées :

$$\vec{AI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AJ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Produit scalaire dans un repère orthonormal

Dans un repère orthonormal de l'espace, si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{AI} \cdot \vec{AJ} &= \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = 1}$$

2. b. En déduire la mesure de l'angle \widehat{IAJ} arrondie au dixième de degré.

Corrigé



Produit scalaire et angle

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta),$$

où θ est l'angle formé par les deux vecteurs.

On calcule :

$$\begin{aligned} AI &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$



De même :

$$AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

On sait que :

$$\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{AI} \cdot \vec{AJ} &= AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ}) \\ 1 &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos(\widehat{IAJ}) \\ 1 &= \frac{5}{4} \cos(\widehat{IAJ}) \\ \cos(\widehat{IAJ}) &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\widehat{IAJ} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,9^\circ.$$

$$\boxed{\widehat{IAJ} \approx 36,9^\circ}$$

3.

3. a. Démontrer que le vecteur \vec{KC} est un vecteur normal au plan (AIJ) .

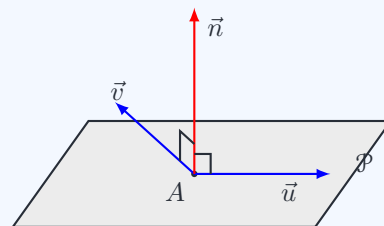
Corrigé



Vecteur normal à un plan

Un vecteur non nul \vec{n} est normal à un plan \mathcal{P} s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan. Autrement dit, si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} , alors :

$$\vec{n} \perp \mathcal{P} \iff \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$



Les vecteurs \vec{AI} et \vec{AJ} sont deux vecteurs non colinéaires du plan (AIJ) .

Le vecteur \vec{KC} a pour coordonnées :

$$\vec{KC} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{KC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \vec{KC} \cdot \vec{AI} &= 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 - \frac{1}{2} \times 1 \\ &= 0, \end{aligned}$$



et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AJ} &= 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Le vecteur \overrightarrow{KC} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AIJ) .

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{KC} \text{ est un vecteur normal au plan } (AIJ).}$$

3. b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est :

$$x + y - \frac{1}{2}z = 0.$$



Corrigé



Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormal, si un plan admet un vecteur normal de coordonnées $(a ; b ; c)$, alors il admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

D'après la question précédente, le plan (AIJ) admet pour vecteur normal \overrightarrow{KC} , qui a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une équation du plan (AIJ) est de la forme :

$$x + y - \frac{1}{2}z + d = 0.$$

Or le point $A(0 ; 0 ; 0)$ appartient au plan (AIJ) .

Donc :

$$0 + 0 - \frac{1}{2} \times 0 + d = 0$$

d'où :

$$d = 0.$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan (AIJ) est :

$$\boxed{x + y - \frac{1}{2}z = 0}$$



4. Soit L le projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ) .

4. a. Déterminer les coordonnées du point L .



Corrigé



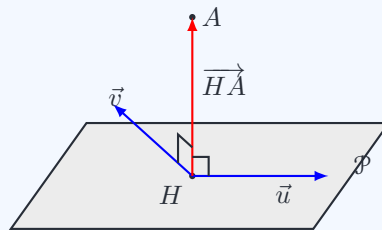
Projeté orthogonal sur un plan

Soit A un point de l'espace et \mathcal{P} un plan.

On appelle **projeté orthogonal** de A sur le plan \mathcal{P} le point H du plan \mathcal{P} tel que :

$$H \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad (AH) \perp \mathcal{P}.$$

Autrement dit, H est le point d'intersection du plan \mathcal{P} avec la droite passant par A et dirigée par un vecteur normal au plan.



On sait que \overrightarrow{KC} est un vecteur normal au plan (AIJ) .

La droite passant par $C(1 ; 1 ; 0)$ et dirigée par \overrightarrow{KC} admet donc une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le point L appartient aussi au plan (AIJ) , d'équation :

$$x + y - \frac{1}{2}z = 0.$$

On remplace donc x, y et z par leurs expressions :

$$\begin{aligned} (1+t) + (1+t) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}t \right) &= 0 \iff 2 + 2t + \frac{1}{4}t = 0 \\ &\iff 8 + 8t + t = 0 \\ &\iff 9t = -8 \\ &\iff t = -\frac{8}{9}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$x = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}, \quad y = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9},$$

et :

$$z = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{9} \right) = \frac{4}{9}.$$

Donc :

$$L \left(\frac{1}{9} ; \frac{1}{9} ; \frac{4}{9} \right)$$



4. b. En déduire que la distance du point C au plan (AIJ) est égale à $\frac{4}{3}$.

**Corrigé**

La distance du point C au plan (AIJ) est la longueur CL , où L est le projeté orthogonal de C sur le plan.

On a :

$$C(1 ; 1 ; 0) \quad \text{et} \quad L\left(\frac{1}{9} ; \frac{1}{9} ; \frac{4}{9}\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned} CL &= \sqrt{\left(\frac{1}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{64}{81} + \frac{16}{81}} \\ &= \sqrt{\frac{144}{81}} \\ &= \frac{12}{9} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d(C ; (AIJ)) = \frac{4}{3}$$



5. Soit M un point de la droite (FG) .

On admet que les coordonnées de M sont $(1 ; m ; 1)$ avec m appartenant à \mathbb{R} .

5. a. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IM) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$



Corrigé



Représentation paramétrique d'une droite

Une droite passant par un point $P(x_P ; y_P ; z_P)$ et dirigée par un vecteur \vec{u} de coordonnées $(a ; b ; c)$ admet une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_P + ta \\ y = y_P + tb \\ z = z_P + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right) \quad \text{et} \quad M(1 ; m ; 1).$$

Le vecteur \vec{IM} a pour coordonnées :

$$\vec{IM} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ m - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{IM} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (IM) est donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ y = 0 + ms \\ z = 1 + 0s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$



5. b. Peut-on affirmer que les droites (IM) et (KC) sont coplanaires quelle que soit la valeur de m ?



Corrigé



Droites coplanaires dans l'espace

Deux droites de l'espace sont coplanaires lorsqu'il existe un plan qui les contient toutes les deux.
En particulier :

- deux droites sécantes sont coplanaires ;
- deux droites parallèles sont coplanaires.

Deux droites qui ne sont ni parallèles ni sécantes ne sont pas coplanaires.

• Vecteurs directeurs des deux droites.

La droite (KC) a pour vecteur directeur \overrightarrow{KC} , dont les coordonnées sont :

$$\overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La droite (IM) a pour vecteur directeur \overrightarrow{IM} , dont les coordonnées sont :

$$\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

• Les droites ne sont pas parallèles.

Les deux vecteurs directeurs ne peuvent pas être colinéaires.

En effet, la troisième coordonnée de \overrightarrow{IM} est nulle, tandis que celle de \overrightarrow{KC} vaut $-\frac{1}{2}$.

Donc les droites (IM) et (KC) ne sont pas parallèles.

• Recherche d'une éventuelle intersection.

Une représentation paramétrique de la droite (KC) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

D'après la question précédente, une représentation paramétrique de la droite (IM) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Cherchons si ces deux droites peuvent être sécantes. On résout donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} = t \\ ms = t \\ 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases}$$



La troisième équation donne :

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \iff \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}t \\ \iff t = -1.$$

La première équation donne alors :

$$\frac{1}{2}s + \frac{1}{2} = -1 \iff \frac{1}{2}s = -\frac{3}{2} \\ \iff s = -3.$$

La deuxième équation devient donc :

$$ms = t \iff -3m = -1 \\ \iff m = \frac{1}{3}.$$

• **Conclusion.**

Les droites (IM) et (KC) sont sécantes uniquement pour :

$$m = \frac{1}{3}.$$

Comme elles ne sont jamais parallèles, elles sont coplanaires uniquement dans ce cas.

On ne peut donc pas affirmer qu'elles sont coplanaires quelle que soit la valeur de m .

Non, elles sont coplanaires uniquement pour $m = \frac{1}{3}$.

**Exercice 4. Fonction logarithme, convexité et intégration****6 points**On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.**Partie A****1.****1. a.** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.**Corrigé**• **Limite en 0^+ .**

On a :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a :

$$\ln(x) \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad x^2 \rightarrow 0^+.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$$

• **Limite en $+\infty$.****Propriété 1** (Limites liées à la fonction logarithme)– **Limites usuelles.**

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

– **Croissances comparées.**Pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \end{cases}$$

– **Conséquence du nombre dérivé en 1.**

À savoir redémontrer.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On utilise la croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$



1. b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.



Corrigé

D'après la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Graphiquement, cela signifie que l'axe des ordonnées, d'équation :

$$x = 0,$$

est une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Graphiquement, cela signifie que l'axe des abscisses, d'équation :

$$y = 0,$$

est une asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$.

$$\begin{aligned} x = 0 &\text{ est une asymptote verticale à } \mathcal{C}_f, \\ y = 0 &\text{ est une asymptote horizontale à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty. \end{aligned}$$

2. Pour tout réel strictement positif x , démontrer que :

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$



Corrigé

Pour tout réel $x > 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \ln(x) \times x^{-2}.$$

On dérive alors le produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \times x^{-2} + \ln(x) \times (-2x^{-3}) \\ &= x^{-3} - 2 \ln(x)x^{-3} \\ &= (1 - 2 \ln(x))x^{-3} \\ &= \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.



Corrigé

On sait que :

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

Sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$x^3 > 0.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - 2 \ln(x)$.



Réolvons :

$$\begin{aligned} 1 - 2 \ln(x) = 0 &\iff 2 \ln(x) = 1 \\ &\iff \ln(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff x = e^{\frac{1}{2}} \\ &\iff x = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$1 - 2 \ln(x) > 0 \iff x < \sqrt{e},$$

et :

$$1 - 2 \ln(x) < 0 \iff x > \sqrt{e}.$$

On calcule la valeur de l'extremum :

$$\begin{aligned} f(\sqrt{e}) &= \frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{e} \\ &= \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

La fonction f admet donc un maximum sur $]0 ; +\infty[$, égal à :

$$\boxed{\frac{1}{2e}}$$

et atteint pour :

$$\boxed{x = \sqrt{e}}.$$

4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ , tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.



Corrigé



Équation d'une tangente

Si f est dérivable en a , alors une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

On calcule :

$$f(1) = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0.$$



De plus :

$$f'(1) = \frac{1 - 2 \ln(1)}{1^3} = 1.$$

La tangente Δ à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 a donc pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= 1(x - 1) + 0 \\ &= x - 1. \end{aligned}$$

$$\Delta : y = x - 1$$



5. Vérifier que, pour tout réel strictement positif x , on a :

$$f''(x) = \frac{-5 + 6 \ln(x)}{x^4}.$$

Corrigé

On part de :

$$f'(x) = (1 - 2 \ln(x)) x^{-3}.$$

On dérive le produit :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2}{x} x^{-3} + (1 - 2 \ln(x)) (-3x^{-4}) \\ &= -2x^{-4} - 3(1 - 2 \ln(x)) x^{-4} \\ &= [-2 - 3 + 6 \ln(x)] x^{-4} \\ &= (-5 + 6 \ln(x)) x^{-4} \\ &= \frac{-5 + 6 \ln(x)}{x^4}. \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{-5 + 6 \ln(x)}{x^4}$$

6.

6. a. Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

Corrigé

Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si $f''(x) \geq 0$ sur I , alors f est convexe sur I .
- Si $f''(x) \leq 0$ sur I , alors f est concave sur I .
- Si f'' change de signe en a , alors la courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a .

On a :

$$f''(x) = \frac{-5 + 6 \ln(x)}{x^4}.$$

Sur $]0 ; +\infty[$:

$$x^4 > 0.$$

Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $-5 + 6 \ln(x)$.

Résolvons :

$$\begin{aligned} -5 + 6 \ln(x) = 0 &\iff 6 \ln(x) = 5 \\ &\iff \ln(x) = \frac{5}{6} \\ &\iff x = e^{\frac{5}{6}}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$f''(x) < 0 \text{ sur }]0 ; e^{\frac{5}{6}}[$$

et :

$$f''(x) > 0 \text{ sur }]e^{\frac{5}{6}} ; +\infty[.$$

Ainsi, f est concave sur $]0 ; e^{\frac{5}{6}}]$ et convexe sur $]e^{\frac{5}{6}} ; +\infty[$.



Comme f'' change de signe en $e^{\frac{5}{6}}$, la courbe \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion d'abscisse :

$$e^{\frac{5}{6}}.$$

Son ordonnée est :

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{5}{6}}\right) &= \frac{\ln\left(e^{\frac{5}{6}}\right)}{\left(e^{\frac{5}{6}}\right)^2} \\ &= \frac{5}{e^{\frac{10}{6}}} \\ &= \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned}$$

Le point d'inflexion a donc pour coordonnées :

$$\left(e^{\frac{5}{6}} ; \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}} \right)$$

6. b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $]0 ; e^{\frac{5}{6}}]$, on a :

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}.$$



Corrigé

D'après la question précédente, la fonction f est concave sur :

$$]0 ; e^{\frac{5}{6}}].$$

Or la droite Δ d'équation :

$$y = x - 1$$

est la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.



Fonction concave et tangentes

Sur un intervalle où une fonction est concave, sa courbe est située en dessous de ses tangentes.

Donc, pour tout réel $x \in]0 ; e^{\frac{5}{6}}]$, on a :

$$f(x) \leq x - 1.$$

Autrement dit :

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$$



7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $[e^{\frac{5}{6}}; +\infty[$, on a aussi :

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Corrigé

On pose :

$$a = e^{\frac{5}{6}}.$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$f(a) \leq a - 1.$$

De plus :

$$a = e^{\frac{5}{6}} > \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le tableau de variation de f , la fonction f est décroissante sur :

$$[\sqrt{e}; +\infty[.$$

Donc, pour tout réel $x \in [a; +\infty[$:

$$f(x) \leq f(a).$$

Par ailleurs, comme $x \geq a$, on a :

$$a - 1 \leq x - 1.$$

Ainsi, pour tout réel $x \in [a; +\infty[$:

$$f(x) \leq f(a) \leq a - 1 \leq x - 1.$$

Donc :

$$f(x) \leq x - 1.$$

Autrement dit :

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Partie B

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul n , par :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

1. Donner une interprétation graphique de I_n pour un entier naturel non nul n .

Corrigé

Pour $x \geq 1$, on a :

$$\ln(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 > 0.$$

Donc :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n , le nombre :

$$I_n = \int_1^n f(x) dx$$

représente l'aire, en unités d'aire, du domaine situé entre :

- la courbe \mathcal{C}_f ;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.



2. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.

 **Corrigé**

Pour tout entier naturel non nul n :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x) \, dx - \int_1^n f(x) \, dx.$$

Par la relation de Chasles :

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x) \, dx.$$



Intégrale d'une fonction positive

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, avec $a < b$.

Si, pour tout $x \in [a ; b]$, on a :

$$f(x) \geq 0,$$

alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq 0.$$

Or, pour tout $x \geq 1$:

$$\ln(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 > 0.$$

Donc :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0.$$

De plus, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$n < n + 1.$$

Ainsi, on intègre une fonction continue et positive sur l'intervalle $[n ; n + 1]$.

Donc :

$$\int_n^{n+1} f(x) \, dx \geq 0.$$

Donc :

$$\int_n^{n+1} f(x) \, dx \geq 0.$$

Ainsi :

$$I_{n+1} - I_n \geq 0.$$

La suite (I_n) est donc croissante.

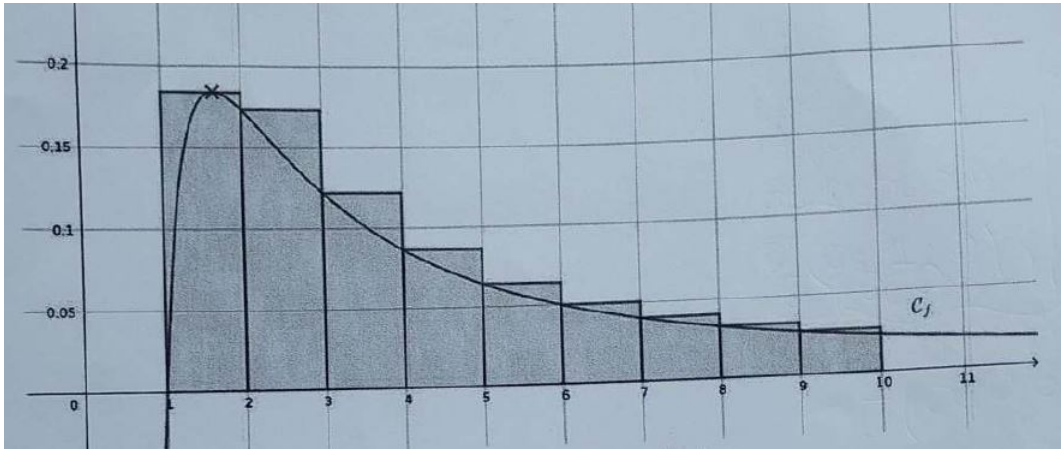
(I_n) est croissante.



3. On souhaite calculer une approximation de

$$\int_1^{10} f(x) dx$$

en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique donné.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage Python.

```
1 from math import *
2
3 S = 1 / (2 * exp(1))
4 for i in range(2, 10):
5     S = ...
6 print(S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

Corrigé

Le premier rectangle a pour aire :

$$\frac{1}{2e},$$

ce qui est déjà stocké dans la variable S par la ligne :

$$S = 1 / (2 * \exp(1)).$$

Ensuite, pour les rectangles suivants, de largeur 1, on ajoute les hauteurs :

$$f(i) = \frac{\ln(i)}{i^2}$$

pour i allant de 2 à 9.

La ligne à compléter est donc :

```
S = S + log(i) / (i**2)
```



4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}.$$



Corrigé



Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

On pose :

$$u(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On choisit donc :

$$v(x) = -\frac{1}{x}.$$

Les fonctions $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto -\frac{1}{x}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[1; n]$, car $n \geq 1$ et elles sont dérivables avec des dérivées continues sur $]0; +\infty[$.

De plus :

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x} \right) dx \\ &= -\frac{\ln(n)}{n} + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln(n)}{n} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n \\ &= -\frac{\ln(n)}{n} + \left(-\frac{1}{n} + 1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n} \\ &= \frac{n-1-\ln(n)}{n}. \end{aligned}$$

Donc :

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$



5. Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

 **Corrigé**

On sait que :

$$I_n = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}.$$

On écrit :

$$I_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n}.$$

Propriété 2 (Limites liées à la fonction logarithme)

• **Limites usuelles.**

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

• **Croissances comparées.**

Pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \end{cases}$$

• **Conséquence du nombre dérivé en 1.**

À savoir redémontrer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On a par les croissances comparées :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{par somme}} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1}$$

↩ **Fin du devoir** ↪