BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Mathématiques

Spécialité Mathématiques

Corrigé détaillé

Centres Étrangers – 11 Juin 2026

Sujet 2

SESSION	DURÉE	BARÈME
2026	**4 heures**	**20 points**

Exercice	Thème principal	Points
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	4 points
Exercice 2	Probabilités conditionnelles, loi binomiale et concentration	4 points
Exercice 3	Fonction logarithme et suites récurrentes	6 points
Exercice 4	Équation différentielle, fonction exponentielle, intégration et tangentes	6 points
Total	**Sujet complet**	**20 points**

Bac 2026

Tous les sujets, corrigés, fichiers LaTeX et bilans de notions de la session 2026 sont disponibles sur la page mère :

Annales Bac Maths 2026 – sujets, corrigés, fichiers LaTeX et notions évaluées

Conseil : le jour de l'épreuve, il faut numéroter clairement les questions, justifier chaque réponse, soigner les calculs et encadrer les résultats importants.

Exercice 1. Géométrie dans l'espace — 4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère :

- les points de l'espace
$$A(1\ ;\ 0\ ;\ 3),\quad B(2\ ;\ 1\ ;\ -1),\quad C(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\quad \text{et}\quad H(0\ ;\ 2\ ;\ 1);$$
- le vecteur
$$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan de l'espace.

Corrigé

Les points A, B et C définissent un plan si ces trois points ne sont pas alignés, c'est-à-dire si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\1-0\\-1-3\end{pmatrix}\quad \text{soit}\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix},$$

et :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-3\end{pmatrix}\quad \text{soit}\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car la première coordonnée de $\overrightarrow{AC}$ est nulle alors que celle de $\overrightarrow{AB}$ ne l'est pas.
Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ définissent donc un plan.}}$$

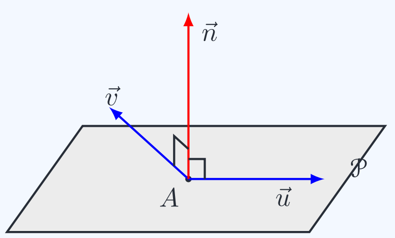
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Corrigé

Vecteur normal à un plan

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
Autrement dit, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$, alors :

$$\vec{n}\perp\mathcal{P}\quad\iff\quad\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{v}=0\end{cases}$$



On sait que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).
Calculons les produits scalaires :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} &= 4\times 1+4\times 1+2\times(-4)\\ &= 4+4-8\\ &= 0,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} &= 4\times 0+4\times 1+2\times(-2)\\ &= 4-4\\ &= 0.\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

$$\boxed{\vec{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC).}$$

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Corrigé

Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé de l'espace, si un plan admet un vecteur normal de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$, alors une équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0.$$

Le plan (ABC) admet pour vecteur normal :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :

$$4x+4y+2z+d=0.$$

Or le point $A(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ appartient au plan (ABC).
Donc :

$$\begin{aligned}4\times 1+4\times 0+2\times 3+d=0 &\iff 10+d=0\\ &\iff d=-10.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$4x+4y+2z-10=0.$$

En divisant par 2, on obtient une équation cartésienne simplifiée du plan (ABC) :

$$\boxed{2x+2y+z-5=0.}$$

4. Vérifier que le point H appartient au plan (ABC).

Corrigé

On utilise l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$2x + 2y + z - 5 = 0.$$

Pour le point $H(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$, on calcule :

$$\begin{aligned} 2x_H + 2y_H + z_H - 5 &= 2 \times 0 + 2 \times 2 + 1 - 5 \\ &= 0 + 4 + 1 - 5 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées du point H vérifient donc l'équation du plan (ABC).

$$\boxed{H \in (ABC).}$$

5. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAH}$.

Corrigé

Produit scalaire et angle

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta),$$

où θ est l'angle formé par les deux vecteurs.

L'angle $\widehat{BAH}$ est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} &= 1 \times (-1) + 1 \times 2 + (-4) \times (-2) \\ &= -1 + 2 + 8 = 9. \end{aligned}$$

De plus on est dans un repère orthonormé, donc :

$$AB = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

et :

$$AH = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

De ce fait :

$$\cos\left(\widehat{BAH}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}{AB \times AH} = \frac{9}{3\sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\widehat{BAH} = 45°}$$

6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point H.

Corrigé

Droite orthogonale à un plan

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle admet pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan.

La droite (d) est orthogonale au plan (ABC).
Or :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$$

est un vecteur normal au plan (ABC).
Donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (d).
Comme (d) passe par $H(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$, une représentation paramétrique de (d) est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 4t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 2t \end{cases}}$$

7. Déterminer les coordonnées du point $S(x_S\ ;\ y_S\ ;\ z_S)$ de la droite (d) tel que :

- la distance entre le point S et le plan (ABC) est 6 ;
- son abscisse x_S est positive.

Corrigé

- **Expression des coordonnées de S.**
  Comme S appartient à la droite (d), il existe un réel t tel que :
  $$S(4t\ ;\ 2 + 4t\ ;\ 1 + 2t).$$
- **Utilisation de la distance au plan.**
  Le point H appartient au plan (ABC) et la droite (d) est orthogonale au plan (ABC).
  Ainsi, pour tout point S de la droite (d), le point H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
  La distance entre S et le plan (ABC) est donc la longueur SH.
  Or le vecteur $\overrightarrow{HS}$ a pour coordonnées :
  $$\overrightarrow{HS}\begin{pmatrix}4t\\4t\\2t\end{pmatrix}.$$
  Ainsi :
  $$\begin{aligned} SH &= \sqrt{(4t)^2 + (4t)^2 + (2t)^2} \\ &= \sqrt{16t^2 + 16t^2 + 4t^2} \\ &= \sqrt{36t^2} \\ &= 6|t|. \end{aligned}$$
  On veut :
  $$SH = 6.$$

Donc :

$$\begin{aligned} 6|t| = 6 &\iff |t| = 1 \\ &\iff t = -1 \quad \text{ou} \quad t = 1. \end{aligned}$$

- **Condition sur l'abscisse.**
  L'abscisse de S est :
  $$x_S = 4t.$$
  On veut :
  $$x_S > 0.$$
  Ainsi :
  $$4t > 0 \iff t > 0.$$
  Donc :
  $$t = 1.$$
- **Coordonnées de S.**
  Pour $t = 1$, on obtient :
  $$S(4\,;\ 2+4\,;\ 1+2).$$
  Donc :
  $$\boxed{S(4\,;\ 6\,;\ 3).}$$

Exercice 2. Probabilités conditionnelles, loi binomiale et concentration — 4 points

Parmi les habitants âgés d'au moins 15 ans vivant en France, on compte :

- 21 % de personnes de 15 à 29 ans ;
- 46 % de personnes de 30 à 59 ans ;
- 33 % de personnes d'au moins 60 ans.

On s'intéresse à l'utilisation d'un réseau social par les habitants âgés d'au moins 15 ans vivant en France.
On note :

- J l'événement : « la personne interrogée a entre 15 et 29 ans » ;
- M l'événement : « la personne interrogée a entre 30 et 59 ans » ;
- S l'événement : « la personne interrogée a au moins 60 ans » ;
- R l'événement : « la personne interrogée a déjà publié sur ce réseau social ».

On note $\overline{R}$ l'événement contraire de l'événement R.
Dans tout l'exercice, les valeurs approchées seront arrondies au millième.

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité.

Corrigé

On utilise les données de l'énoncé :

$$P(J) = 0,21, \qquad P(M) = 0,46, \qquad P(S) = 0,33.$$

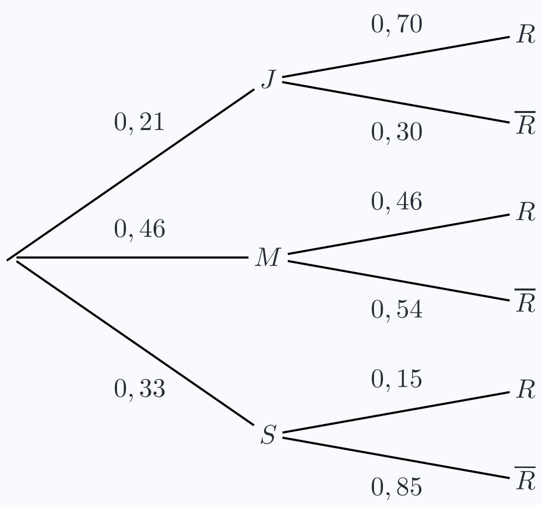
De plus :

$$P_J(R) = 0,70, \qquad P_M(R) = 0,46, \qquad P_S(R) = 0,15.$$

On en déduit les probabilités des événements contraires :

$$P_J(\overline{R}) = 0,30, \qquad P_M(\overline{R}) = 0,54, \qquad P_S(\overline{R}) = 0,85.$$

L'arbre complété est donc :



©ISSN 2272-5318

2. Déterminer $P(M \cap R)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

D'après l'arbre :

$$P(M) = 0,46 \qquad \text{et} \qquad P_M(R) = 0,46.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(M \cap R) &= P(M) \times P_M(R) \\ &= 0,46 \times 0,46 \\ &= 0,2116. \end{aligned}$$

Ainsi, au millième près :

$$\boxed{P(M \cap R) \approx 0,212.}$$

Cela signifie qu'environ $21,2\,\%$ des habitants âgés d'au moins 15 ans vivant en France ont entre 30 et 59 ans et ont déjà publié sur ce réseau social.

3. On interroge au hasard une personne âgée d'au moins 15 ans vivant en France.

3. a. Calculer la probabilité qu'elle ait déjà publié sur ce réseau social.

Corrigé

Les événements J, M et S forment une partition de l'univers.
On utilise donc la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(J \cap R) + P(M \cap R) + P(S \cap R) \\ &= P(J)P_J(R) + P(M)P_M(R) + P(S)P_S(R) \\ &= 0,21 \times 0,70 + 0,46 \times 0,46 + 0,33 \times 0,15 \\ &= 0,147 + 0,2116 + 0,0495 \\ &= 0,4081. \end{aligned}$$

Ainsi, au millième près :

$$\boxed{P(R) \approx 0,408.}$$

La probabilité qu'une personne interrogée ait déjà publié sur ce réseau social est donc environ $0,408$.

3. b. On sait que cette personne a déjà publié sur ce réseau social. Déterminer la probabilité qu'elle ait au moins 60 ans.

Corrigé

On cherche :

$$P_R(S) = P(S \mid R).$$

Probabilité conditionnelle

Si $P(R) \neq 0$, alors :

$$P_R(S) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)}.$$

On a :

$$P(S \cap R) = P(S)P_S(R) = 0,33 \times 0,15 = 0,0495.$$

De plus, d'après la question précédente :

$$P(R) = 0,4081.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_R(S) &= \frac{P(S \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{0,0495}{0,4081} \\ &\approx 0,121. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P_R(S) \approx 0,121.}$$

Sachant que la personne interrogée a déjà publié sur ce réseau social, la probabilité qu'elle ait au moins 60 ans est donc environ $12,1\,\%$.

Partie B

Au cours d'un sondage, on interroge successivement, au hasard et de manière indépendante, 100 personnes âgées d'au moins 15 ans vivant en France et on leur demande si elles ont déjà publié sur ce réseau social.
La population du pays est suffisamment grande pour qu'on assimile le choix des personnes sondées à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi ces 100 personnes interrogées.
Dans cette partie, on admet que la probabilité qu'une personne âgée d'au moins 15 ans vivant en France ait déjà publié sur ce réseau social est $0,41$.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.

Corrigé

La variable aléatoire X compte le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi 100 personnes interrogées.
Pour chaque personne, la probabilité de succès est :

$$p = 0,41.$$

On admet que X suit une loi binomiale.
Donc :

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(100\,;\ 0,41).}$$

2. Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des 100 personnes interrogées ait déjà publié sur ce réseau social.

Corrigé

On cherche la probabilité qu'au moins la moitié des 100 personnes interrogées ait déjà publié sur ce réseau social.
Cela correspond à :

$$P(X \geqslant 50).$$

Comme :

$$X \sim \mathcal{B}(100\,;\ 0,41),$$

on a :

$$P(X \geqslant 50) = \sum_{k=50}^{100} \binom{100}{k} (0,41)^k (0,59)^{100-k}.$$

À la calculatrice, on obtient :

$$P(X \geqslant 50) \approx 0,0427897.$$

Ainsi, au millième près :

$$\boxed{P(X \geqslant 50) \approx 0,043.}$$

3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Espérance d'une loi binomiale

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors :

$$E(X) = np.$$

On a :

$$X \sim \mathcal{B}(100\ ;\ 0,41).$$

Donc :

$$E(X) = 100 \times 0,41 = 41.$$

Ainsi :

$$\boxed{E(X) = 41.}$$

Cela signifie que, sur un grand nombre de sondages réalisés dans les mêmes conditions, on peut s'attendre en moyenne à ce que 41 personnes sur 100 aient déjà publié sur ce réseau social.

Partie C

On effectue le sondage décrit dans la partie B dans 150 villes françaises en respectant les mêmes conditions.
On note $X_1, X_2, \ldots, X_{150}$ les variables aléatoires donnant le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi les 100 personnes interrogées dans chacune des 150 villes.
On considère la variable aléatoire Y définie par :

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}}{150}.$$

Démontrer que la probabilité que la variable aléatoire Y soit strictement comprise entre 37 et 45 est strictement supérieure à 98 %.

Corrigé

- **Loi, espérance et variance des variables X_i.**
  Pour chaque ville, on réalise un sondage dans les mêmes conditions que dans la partie B.
  Ainsi, pour tout entier i compris entre 1 et 150 :

$$X_i \sim \mathcal{B}(100\ ;\ 0,41).$$

Espérance et variance d'une loi binomiale

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N\ ;\ p)$, alors :

$$E(X) = Np \qquad \text{et} \qquad V(X) = Np(1-p).$$

Donc :

$$E(X_i) = 100 \times 0,41 = 41.$$

De plus :

$$\begin{aligned} V(X_i) &= 100 \times 0,41 \times (1 - 0,41) \\ &= 100 \times 0,41 \times 0,59 \\ &= 24,19. \end{aligned}$$

- **Espérance de Y.**

On a :

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}}{150}.$$

Somme de variables aléatoires

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires admettant une espérance, alors :

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Si, de plus, $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n).$$

Espérance et variance d'une transformation affine

Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, et si a et b sont deux réels, alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Pour la variance :

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}}{150}\right) \\
&= \frac{1}{150}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{150}) \\
&= \frac{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{150})}{150} \\
&= \frac{150 \times 41}{150} \\
&= 41.
\end{aligned}$$

- **Variance de Y.**
  Les sondages étant réalisés dans les mêmes conditions et indépendamment, les variables $X_1, \ldots, X_{150}$ sont indépendantes.
  Donc :

$$\begin{aligned}
V(Y) &= V\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{150}}{150}\right) \\
&= \frac{1}{150^2}V(X_1 + \cdots + X_{150}) \\
&= \frac{1}{150^2}\left(V(X_1) + \cdots + V(X_{150})\right) \\
&= \frac{1}{150^2} \times 150 \times 24,19 \\
&= \frac{24,19}{150}.
\end{aligned}$$

- **Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.**
  On cherche :

$$P(37 < Y < 45).$$

Comme :

$$E(Y) = 41,$$

on remarque que :

$$37 < Y < 45 \iff |Y - 41| < 4.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit Y une variable aléatoire admettant une espérance $E(Y)$ et une variance $V(Y)$.
Alors, pour tout réel $\delta > 0$:

$$P\left(|Y - E(Y)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(Y)}{\delta^2}.$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée avec $\delta = 4$:

$$P(|Y - 41| \geqslant 4) \leqslant \frac{V(Y)}{4^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(|Y - 41| \geqslant 4) &\leqslant \frac{\frac{24,19}{150}}{16} \\ &= \frac{24,19}{2400} \\ &\approx 0,010079. \end{aligned}$$

Donc :

$$P(|Y - 41| \geqslant 4) < 0,02.$$

Par passage à l'événement contraire :

$$P(|Y - 41| < 4) > 0,98.$$

Or :

$$|Y - 41| < 4 \iff 37 < Y < 45.$$

Donc :

$$\boxed{P(37 < Y < 45) > 0,98.}$$

La probabilité que Y soit strictement comprise entre 37 et 45 est donc strictement supérieure à 98 %.

Exercice 3. Fonction logarithme et suites récurrentes — 6 points

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$.

Corrigé

Pour tout réel $x \in [2\ ;\ +\infty[$:

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x).$$

La fonction f est dérivable sur $[2\ ;\ +\infty[$, et elle est de la forme $\ln(u)$, où $u > 0$ sur $[2\ ;\ +\infty[$.
On utilise donc :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Pour tout réel $x \in [2\ ;\ +\infty[$, on a alors :

$$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x}.$$

Pour tout réel x de $[2\ ;\ +\infty[$ on a alors :

$$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x}.$$

Or, pour tout réel $x \geqslant 2$:

$$6x + 2 > 0 \qquad \text{et} \qquad 3x^2 + 2x = x(3x+2) > 0.$$

Donc :

$$f'(x) > 0.$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [2\ ;\ +\infty[.}$$

2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ et que :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$.

Corrigé

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I, alors l'équation :

$$f(x) = k$$

admet au plus une solution sur I.
De plus, si k est compris entre deux valeurs prises par f sur I, alors cette solution existe.

- **Continuité et monotonie.**
  La fonction g est continue sur $[2\,;\,+\infty[$ comme différence de fonctions continues.
  De plus, l'énoncé admet que g est strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$.
- **Existence d'une solution.**
  On calcule :
  $$g(2) = f(2) - 2 = \ln(16) - 2 > 0.$$
  De plus :
  $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$
  Donc la fonction g prend des valeurs positives puis des valeurs négatives sur $[2\,;\,+\infty[$.
  Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation :
  $$g(x) = 0$$
  admet au moins une solution sur $[2\,;\,+\infty[$.
- **Unicité.**
  Comme g est strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$, cette solution est unique.
  On la note α.

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [2\,;\,+\infty[.}$$

2. b. Donner la valeur de α arrondie au centième.

Corrigé

La calculatrice donne :
$$\left\{ g(4,04) \approx 0,0038 > 0 // g(4,05) \approx -0,0016 < 0 \right.$$
Comme la fonction g est strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$, on en déduit :
$$4,04 < \alpha < 4,05.$$
Ainsi, au centième près :
$$\boxed{\alpha \approx 4,05.}$$

2. c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

Corrigé

On sait que g est strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$ et que α est l'unique solution de l'équation :
$$g(x) = 0.$$
De plus :
$$g(2) > 0.$$
Donc :
$$g(x) > 0 \text{ sur } [2\,;\,\alpha[, \qquad g(\alpha) = 0, \qquad g(x) < 0 \text{ sur }]\alpha\,;\,+\infty[.$$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	2		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la partie A.
On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n).$$

On étudie le cas où :

$$2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha,$$

où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$2 \leqslant a_n \leqslant \alpha.$$

Corrigé

On remarque que :

$$a_{n+1} = f(a_n).$$

On note pour n entier naturel $P(n)$ la propriété, :

$$P(n) : \quad 2 \leqslant a_n \leqslant \alpha.$$

- **Initialisation.**
  Par hypothèse :
  $$2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha.$$
  Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.
  On suppose donc :
  $$2 \leqslant a_n \leqslant \alpha.$$
  La fonction f est strictement croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.
  Donc :
  $$f(2) \leqslant f(a_n) \leqslant f(\alpha).$$
  Or :
  $$f(a_n) = a_{n+1}.$$
  De plus :
  $$f(2) = \ln(16) > 2,$$
  car $16 > e^2$.
  Enfin, comme α est solution de $g(x) = 0$, on a :
  $$g(\alpha) = 0.$$
  Donc :
  $$f(\alpha) - \alpha = 0,$$
  c'est-à-dire :
  $$f(\alpha) = \alpha.$$

On obtient donc :

$$2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.**
  La propriété $P(0)$ est vraie et elle est héréditaire.
  Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{2 \leqslant a_n \leqslant \alpha.}$$

2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.

Corrigé

Pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n = g(a_n).$$

D'après la question précédente :

$$2 \leqslant a_n \leqslant \alpha.$$

Or, d'après le tableau de signes de g :

$$g(x) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } x \in [2\ ;\ \alpha].$$

Donc :

$$g(a_n) \geqslant 0.$$

Ainsi :

$$a_{n+1} - a_n \geqslant 0.$$

Donc :

$$a_{n+1} \geqslant a_n.$$

La suite (a_n) est donc croissante.

$$\boxed{(a_n) \text{ est croissante.}}$$

3. Démontrer que la suite (a_n) converge.

Corrigé

D'après la question précédente, la suite (a_n) est croissante.
De plus, d'après la question 1 :

$$a_n \leqslant \alpha$$

pour tout entier naturel n.
Ainsi, la suite (a_n) est croissante et majorée par α.

Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée par M converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant M$.

Donc la suite (a_n) converge vers un réel ℓ tel que :

$$\ell \leqslant \alpha.$$

Comme, de plus, pour tout entier naturel n :

$$2 \leqslant a_n,$$

on obtient :

$$2 \leqslant \ell \leqslant \alpha.$$

$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ converge vers un réel } \ell \in [2\ ;\ \alpha].}$

4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α.

Corrigé

On note :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell.$$

D'après la question précédente :

$$\ell \in [2\ ;\ \alpha].$$

- **Continuité de la fonction f.**
  La fonction f est définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :
  $$f(x) = \ln(3x^2 + 2x).$$
  Elle est continue sur $[2\ ;\ +\infty[$ comme composée de fonctions continues, avec :
  $$3x^2 + 2x > 0 \qquad \text{pour tout } x \in [2\ ;\ +\infty[.$$

- **Théorème du point fixe.**

  Théorème du point fixe

  Soit (u_n) une suite définie par une relation de récurrence :
  $$u_{n+1} = f(u_n).$$
  Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et si la fonction f est continue en ℓ, alors :
  $$\ell = f(\ell).$$

  La suite (a_n) vérifie :
  $$a_{n+1} = f(a_n).$$
  Comme (a_n) converge vers ℓ et comme f est continue en ℓ, le théorème du point fixe donne :
  $$\ell = f(\ell).$$

- **Identification de la limite.**
  On a :
  $$\ell = f(\ell) \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff g(\ell) = 0.$$
  Or, d'après la partie A, l'équation :
  $$g(x) = 0$$
  admet une unique solution sur $[2\ ;\ +\infty[$, notée α.
  Comme :
  $$\ell \in [2\ ;\ \alpha] \subset [2\ ;\ +\infty[,$$
  on obtient :
  $$\ell = \alpha.$$

- **Conclusion.**

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha.}$$

Partie C

Dans cette partie, on prend :

$$a_0 = 2.$$

La suite (a_n) est ainsi définie par $a_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n).$$

On note (b_n) la suite définie par $b_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n :

$$b_{n+1} = \ln(3b_n^2 + 2b_n).$$

On admet que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n \leqslant b_n.$$

Corrigé

Dans cette partie, on a :

$$a_0 = 2.$$

Donc :

$$2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha.$$

D'après la partie B, on a alors, pour tout entier naturel n :

$$a_n \leqslant \alpha.$$

De plus, l'énoncé admet que la suite (b_n) est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.
Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$b_n \geqslant \alpha.$$

Donc, pour tout entier naturel n :

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n.$$

Ainsi :

$$\boxed{a_n \leqslant b_n.}$$

©ISSN 2272-5318

2. On considère le script ci-dessous écrit en langage Python.

```python
from math import *

def algo(p):
    a = 2
    b = 10
    n = 0
    while b - a > 10**(-p):
        a = log(3*a**2 + 2*a)
        b = log(3*b**2 + 2*b)
        n = n + 1
    return (n, a)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande `log(c)` renvoie la valeur de $\ln(c)$;
- la commande `a**2` renvoie la valeur de a^2.

2. a. Donner les valeurs renvoyées par l'instruction `algo(2)`.
On arrondira si besoin les valeurs au millième.

Corrigé

L'instruction `algo(2)` fait fonctionner la boucle tant que : $b - a > 10^{-2}$.
En exécutant le script, on obtient :

$$n = 9 \quad \text{et} \quad a \approx 4,043583932.$$

Ainsi, au millième près, les valeurs renvoyées sont :

$$\boxed{\texttt{algo(2)} = (9\ ;\ 4,044).}$$

2. b. Interpréter les valeurs renvoyées dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

L'algorithme calcule simultanément les termes des suites (a_n) et (b_n).
La boucle s'arrête dès que :

$$b_n - a_n \leqslant 10^{-2}.$$

Or, d'après la question précédente :

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n.$$

Ainsi, lorsque la boucle s'arrête, les suites (a_n) et (b_n) encadrent α avec une amplitude inférieure ou égale à :

$$10^{-2}.$$

L'appel `algo(2)` renvoie :

$$(9\ ;\ 4,044).$$

Cela signifie qu'au rang 9, on obtient un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}, et que :

$$a_9 \approx 4,044.$$

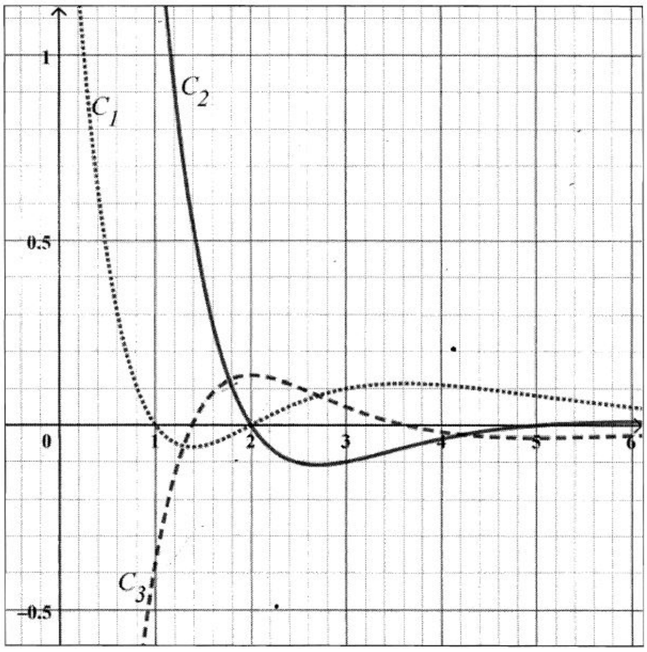
Ainsi, la valeur α est approchée par défaut par $4,044$ au rang 9, avec une erreur inférieure ou égale à 10^{-2}.

$$\boxed{\text{Au rang } 9, \text{ les deux suites encadrent } \alpha \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

Exercice 4. Équation différentielle, fonction exponentielle, intégration et tangentes — 6 points

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$: une fonction f, sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''.
Associer chacune des fonctions f, f' et f'' à sa courbe représentative. Aucune justification n'est attendue.

Corrigé

On utilise les liens graphiques suivants :

$$\text{le signe de } f' \text{ donne les variations de } f,$$

et :

$$\text{le signe de } f'' \text{ donne les variations de } f'.$$

- **Lecture des variations de la courbe $\mathcal{C}_1$.**
  Par lecture graphique, la courbe $\mathcal{C}_1$ semble :
  - décroître jusqu'à une abscisse proche de $1,4$;
  - croître ensuite jusqu'à une abscisse proche de $3,6$;
  - décroître enfin.

  On peut résumer cette lecture par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\simeq 1.4$		$\simeq 3.6$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

  Si $\mathcal{C}_1$ est la courbe de f, alors la courbe de f' doit avoir le signe suivant :

x	$-\infty$		$\simeq 1.4$		$\simeq 3.6$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Or, par lecture graphique, c'est la courbe $\mathcal{C}_3$ qui est négative, puis positive, puis négative.

négative, puis positive, puis négative.

Donc :

$$f \longleftrightarrow \mathcal{C}_1 \qquad \text{et} \qquad f' \longleftrightarrow \mathcal{C}_3.$$

- **Lecture des variations de la courbe $\mathcal{C}_3$.**
  On considère maintenant la courbe $\mathcal{C}_3$, que l'on vient d'identifier comme la courbe de f'.
  Par lecture graphique, la courbe $\mathcal{C}_3$ semble :
  - croître jusqu'à une abscisse proche de 2 ;
  - décroître ensuite jusqu'à une abscisse proche de 5 ;
  - croître enfin.

  On peut résumer cette lecture par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\simeq 2$		$\simeq 5$		$+\infty$
f'		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

  La courbe de f'' doit donc avoir le signe suivant :

x	$-\infty$		$\simeq 2$		$\simeq 5$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Or, par lecture graphique, c'est la courbe $\mathcal{C}_2$ qui est positive, puis négative, puis positive.
  Donc :

$$f'' \longleftrightarrow \mathcal{C}_2.$$

- **Conclusion.**
  On obtient finalement :

$$\boxed{f \longleftrightarrow \mathcal{C}_1, \qquad f' \longleftrightarrow \mathcal{C}_3, \qquad f'' \longleftrightarrow \mathcal{C}_2.}$$

Remarque

On pouvait aussi vérifier cette association a posteriori avec la fonction obtenue dans la suite de l'exercice :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2).$$

On trouve alors :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(-x^2 + 5x - 5) \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2)(x-5),$$

ce qui confirme l'association graphique :

$$\mathcal{C}_1 \leftrightarrow f, \qquad \mathcal{C}_3 \leftrightarrow f', \qquad \mathcal{C}_2 \leftrightarrow f''.$$

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par :

$$y' + y = (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x^2-3x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Corrigé

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} + (x^2-3x)(-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= \left(2x-3-x^2+3x\right)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(-x^2+5x-3\right)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g'(x)+g(x) &= \left(-x^2+5x-3\right)\,\mathrm{e}^{-x} + (x^2-3x)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Donc g vérifie l'équation différentielle (E).

$$\boxed{g \text{ est une solution particulière de } (E).}$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' + y = 0.$$

Corrigé

Équation différentielle homogène $y' = ay$

Les solutions de l'équation différentielle :

$$y' = ay$$

sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{ax},$$

où C est une constante réelle.

L'équation :

$$y' + y = 0$$

s'écrit :

$$y' = -y.$$

C'est donc une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec :

$$a = -1.$$

Les solutions sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Corrigé

Solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre

Les solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre s'obtiennent en ajoutant :

- une solution particulière de l'équation avec second membre ;
- les solutions de l'équation homogène associée.

D'après la question 1, une solution particulière de (E) est :

$$g(x) = (x^2 - 3x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

D'après la question 2, les solutions de l'équation homogène associée sont :

$$x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Donc les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} y(x) &= (x^2 - 3x)\,\mathrm{e}^{-x} + C\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (x^2 - 3x + C)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{y(x) = (x^2 - 3x + C)\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que :

$$f(0) = 2.$$

Corrigé

D'après la question précédente, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = (x^2 - 3x + C)\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La condition $f(0) = 2$ donne :

$$\begin{aligned} f(0) = 2 &\iff (0^2 - 3 \times 0 + C)\,\mathrm{e}^{0} = 2 \\ &\iff C = 2. \end{aligned}$$

La solution cherchée est donc :

$$\boxed{f(x) = (x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}.}$$

Partie C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2),$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour tout réel x :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2).$$

Or :

$$\mathrm{e}^{-x} > 0.$$

Le signe de $f(x)$ est donc celui du trinôme $(x^2 - 3x + 2)$ aux racines évidentes :

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) > 0 \text{ sur }]-\infty\ ;\ 1[\cup]2\ ;\ +\infty[, \\ f(x) = 0 \text{ pour } x = 1 \text{ et } x = 2, \\ f(x) < 0 \text{ sur }]1\ ;\ 2[. \end{array}}$$

2. **2. a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

Corrigé

On a :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2).$$

Lorsque $x \to -\infty$:

$$\mathrm{e}^{-x} \to +\infty \qquad \text{et} \qquad x^2 - 3x + 2 \to +\infty.$$

Donc, par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

2. b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Corrigé

Pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x}}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right).$$

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- **Limites usuelles.**

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0 \end{cases}$$

- **Conséquence du nombre dérivé en 0.**

À savoir redémontrer.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = 1$$

- **Croissances comparées.**

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^n} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^{x} = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x}} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = 1 \end{cases} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

3. On note I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que :

$$I = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Corrigé

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Première intégration par parties.**

On pose :

$$u(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On choisit donc :

$$v(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\,1]$.
De plus :

$$u'(x) = 2x - 3.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x^2-3x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-(x^2-3x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Or :

$$\left[-(x^2-3x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 0-(-2) = 2.$$

Donc :

$$I = 2+\int_0^1 (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

- **Deuxième intégration par parties.**
  On pose :
  $$u_1(x) = 2x-3 \qquad \text{et} \qquad v_1'(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$
  On choisit :
  $$v_1(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}.$$
  Les fonctions u_1 et v_1 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\ ;\ 1]$.
  De plus :
  $$u_1'(x) = 2.$$
  Ainsi :
  $$\int_0^1 (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
  On calcule :
  $$\left[-(2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{\mathrm{e}}-3,$$
  et :
  $$2\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\left[-\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}+1\right) = 2-\frac{2}{\mathrm{e}}.$$
  Donc :
  $$\begin{aligned}\int_0^1 (2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}}-3+2-\frac{2}{\mathrm{e}}\\ &= -1-\frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

- **Conclusion.**
  Finalement :
  $$\begin{aligned} I &= 2+\left(-1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\\ &= 1-\frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$
  Donc :
  $$\boxed{I = 1-\frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

3. b. Interpréter graphiquement ce résultat.

Corrigé

D'après l'étude de signe, la fonction f est positive sur :

$$[0\ ;\ 1].$$

Donc l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

représente l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par :

- la courbe $\mathcal{C}_f$;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Ainsi, cette aire vaut :

$$\boxed{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

Partie D

On considère un réel a.
On note (T_a) la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

1. Démontrer que le point d'intersection de la tangente (T_a) et de l'axe des ordonnées a pour ordonnée :

$$(a^3 - 4a^2 + 2a + 2)\,\mathrm{e}^{-a}.$$

Corrigé

Équation d'une tangente

Si f est dérivable en a, alors une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pour tout réel x :

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On dérive :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 3)\,\mathrm{e}^{-x} + (x^2 - 3x + 2)(-\,\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-x^2 + 5x - 5)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Une équation de la tangente (T_a) est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Le point d'intersection de la tangente (T_a) avec l'axe des ordonnées est donc le point de coordonnées :

$$(0\ ;\ f'(a)(0 - a) + f(a))$$

Son ordonnée vaut donc :

$$f'(a)(0 - a) + f(a) = f(a) - af'(a).$$

Or :

$$\begin{cases} f(a) = (a^2 - 3a + 2)\,\mathrm{e}^{-a} \\ f'(a) = (-a^2 + 5a - 5)\,\mathrm{e}^{-a} \end{cases}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(a) - af'(a) &= (a^2 - 3a + 2)\,\mathrm{e}^{-a} - a(-a^2 + 5a - 5)\,\mathrm{e}^{-a} \\ &= \left(a^2 - 3a + 2 + a^3 - 5a^2 + 5a\right)\,\mathrm{e}^{-a} \\ &= (a^3 - 4a^2 + 2a + 2)\,\mathrm{e}^{-a}. \end{aligned}$$

Ainsi, le point d'intersection de (T_a) avec l'axe des ordonnées a bien pour ordonnée :

$$\boxed{(a^3 - 4a^2 + 2a + 2)\,\mathrm{e}^{-a}.}$$

2. Déterminer le nombre de tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.
Le candidat explicitera les étapes de la démarche utilisée.

Corrigé

- **Condition pour qu'une tangente passe par l'origine.**
D'après la question précédente, la tangente (T_a) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée :
$$(a^3 - 4a^2 + 2a + 2)\,\mathrm{e}^{-a}.$$
La tangente (T_a) passe par l'origine du repère si et seulement si cette ordonnée est nulle.
Ainsi :
$$(T_a) \text{ passe par } O \iff (a^3 - 4a^2 + 2a + 2)\,\mathrm{e}^{-a} = 0.$$
Or, pour tout réel a :
$$\mathrm{e}^{-a} > 0.$$
Donc :
$$(T_a) \text{ passe par } O \iff a^3 - 4a^2 + 2a + 2 = 0.$$
On pose alors :
$$\varphi(a) = a^3 - 4a^2 + 2a + 2.$$
- **Étude des variations de φ.**
La fonction φ est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel a :
$$\varphi'(a) = 3a^2 - 8a + 2.$$
Résolvons :
$$\varphi'(a) = 0 \iff 3a^2 - 8a + 2 = 0.$$
Le discriminant vaut :
$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 64 - 24 = 40.$$
Les deux racines sont :
$$\beta = \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{4 + \sqrt{10}}{3}.$$
Comme le coefficient dominant de φ' est positif, on obtient :
$$\varphi'(a) > 0 \text{ sur }]-\infty\,;\,\beta[$$
$$\varphi'(a) < 0 \text{ sur }]\beta\,;\,\gamma[$$
et :
$$\varphi'(a) > 0 \text{ sur }]\gamma\,;\,+\infty[.$$
De plus :
$$\lim_{a \to -\infty} \varphi(a) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{a \to +\infty} \varphi(a) = +\infty.$$
On calcule aussi :
$$\varphi(\beta) = \frac{2(10\sqrt{10} - 1)}{27} > 0$$
et :
$$\varphi(\gamma) = -\frac{2(10\sqrt{10} + 1)}{27} < 0.$$
On obtient le tableau de variation suivant :

a	$-\infty$	α_1	β	α_2	γ	α_3	$+\infty$
$\varphi'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(a)$	$-\infty$	0	$\varphi(\beta) > 0$	0	$\varphi(\gamma) < 0$	0	$+\infty$

- **Application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.**

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I, alors l'équation :

$$f(x) = k$$

admet au plus une solution sur I.
De plus, si k est compris entre deux valeurs prises par f sur I, alors cette solution existe.

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

D'après le tableau de variations et le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires :

- sur $]-\infty\,;\,\beta]$, la fonction φ est strictement croissante et passe de $-\infty$ à une valeur strictement positive : l'équation $\varphi(a) = 0$ admet donc une unique solution α_1 ;
- sur $[\beta\,;\,\gamma]$, la fonction φ est strictement décroissante et passe d'une valeur strictement positive à une valeur strictement négative : l'équation $\varphi(a) = 0$ admet donc une unique solution α_2 ;
- sur $[\gamma\,;\,+\infty[$, la fonction φ est strictement croissante et passe d'une valeur strictement négative à $+\infty$: l'équation $\varphi(a) = 0$ admet donc une unique solution α_3.

Ainsi, l'équation :

$$\varphi(a) = 0$$

admet exactement trois solutions réelles.

- **Conclusion.**

Chaque solution réelle de l'équation $\varphi(a) = 0$ correspond à une tangente (T_a) passant par l'origine du repère.

Il existe donc exactement :

$$\boxed{3}$$

tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.

Fin du devoir