Math93.com

Baccalauréat 2026 - Spécialité Maths
Correction Asie

Sujet 1 - 9 Juin 2026

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Mathématiques

Spécialité Mathématiques

Corrigé détaillé

Asie – 9 Juin 2026

Sujet 1

SESSION	DURÉE	BARÈME
2026	**4 heures**	**20 points**

Exercice	Thème principal	Points
Exercice 1	Probabilités conditionnelles, suites, algorithme de seuil	5 points
Exercice 2	Vrai/Faux : limites, suites, loi binomiale, intégration, dénombrement	5 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace : vecteurs, plans, intersections	5 points
Exercice 4	Fonctions trigonométriques, variations, TVI, inégalité	5 points
Total	**Sujet complet**	**20 points**

Bac 2026

Tous les sujets, corrigés, fichiers LaTeX et bilans de notions de la session 2026 sont disponibles sur la page mère :

Annales Bac Maths 2026 – sujets, corrigés, fichiers LaTeX et notions évaluées

Conseil : le jour de l'épreuve, il faut numéroter clairement les questions, justifier chaque réponse, soigner les calculs et encadrer les résultats importants.

Exercice 1. Probabilités conditionnelles, suites, algorithme de seuil — 5 points

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\dfrac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'événement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \dfrac{17}{30}$.

Corrigé

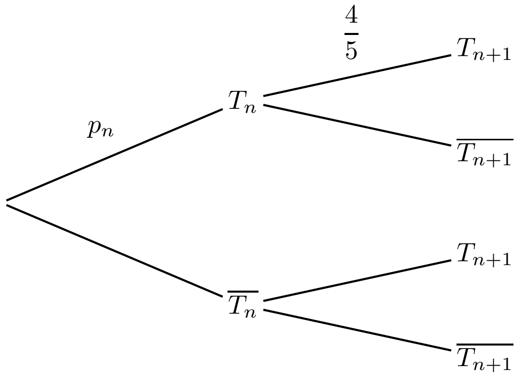
D'après l'énoncé, au premier tir, le tireur atteint le centre avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$\boxed{p_1 = \frac{1}{2}}.$$

Pour calculer p_2, on distingue deux cas : le tireur a atteint le centre au premier tir ou il ne l'a pas atteint.
Les événements T_1 et $\overline{T_1}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p_2 &= P(T_2)\\
&= P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2)\\
&= P(T_1)P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1})P_{\overline{T_1}}(T_2)\\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}\\
&= \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\\
&= \frac{12}{30} + \frac{5}{30}\\
\boxed{p_2 = \frac{17}{30}}.
\end{aligned}$$

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent.



Corrigé

Rappel sur un arbre pondéré

Dans un arbre pondéré :

- la somme des probabilités des branches issues d'un même n ?ud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent.

On a :

$$P(T_n) = p_n \qquad \text{et} \qquad P(\overline{T_n}) = 1 - p_n.$$

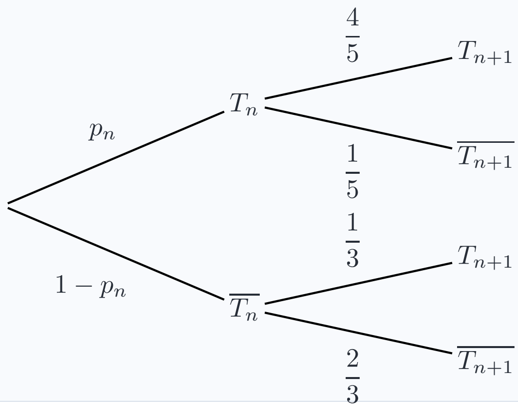
D'après l'énoncé :

$$P_{T_n}(T_{n+1}) = \frac{4}{5} \qquad \text{et} \qquad P_{T_n}(\overline{T_{n+1}}) = \frac{1}{5}.$$

De même :

$$P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{T_n}}(\overline{T_{n+1}}) = \frac{2}{3}.$$

L'arbre complété est donc :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}.$$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul, les événements T_n et $\overline{T_n}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(T_{n+1})\\
&= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1})\\
&= P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n})P_{\overline{T_n}}(T_{n+1})\\
&= p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3}\\
&= \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n\\
&= \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) p_n + \frac{1}{3}\\
&= \left(\frac{12}{15} - \frac{5}{15}\right) p_n + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}}.$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}.$$

4. a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{5}{8}\\
&= \left(\frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{8}\\
&= \frac{7}{15}p_n + \frac{8}{24} - \frac{15}{24}\\
&= \frac{7}{15}p_n - \frac{7}{24}\\
&= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{\frac{7}{24}}{\frac{7}{15}}\right)\\
&= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{7}{24} \times \frac{15}{7}\right)\\
&= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{5}{8}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{7}{15}u_n}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison :

$$\boxed{\frac{7}{15}}.$$

4. b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

Corrigé

Terme général d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Si son premier terme est u_0, alors, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Plus généralement, si l'on connaît un terme u_p, alors, pour tout entier $n \geqslant p$:

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

On calcule d'abord le premier terme :

$$u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}.$$

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_1 = -\frac{1}{8}$ et de raison $\frac{7}{15}$.
Donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{u_n = -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}}.$$

4. c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

Corrigé

Par définition :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}.$$

Donc :

$$p_n = u_n + \frac{5}{8}.$$

En utilisant l'expression de u_n obtenue à la question précédente, pour tout entier $n > 0$:

$$\boxed{p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}}.$$

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Limite d'une suite géométrique

Soit q un nombre réel.
Si $-1 < q < 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$

Si $q > 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$$

Si $q = 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 1.$$

On a :

$$-1 < \frac{7}{15} < 1.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} = 0.$$

Or :

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{5}{8}}.$$

Interprétation. À long terme, la probabilité que le tireur atteigne le centre de la cible se stabilise vers :

$$\frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Autrement dit, lorsque le nombre de tirs devient très grand, la probabilité d'atteindre le centre tend vers :

$$\boxed{62{,}5\,\%}.$$

6. On considère ci-dessous une fonction `seuil`, incomplète, écrite en langage Python. Recopier cette fonction sur la copie en complétant les pointillés afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que p_n soit supérieur ou égal à $0{,}6$.

```python
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while ...:
        n = ...
        p = ...
    return ...
```

Corrigé

On cherche la plus petite valeur de l'entier n telle que :

$$p_n \geqslant 0{,}6.$$

On initialise donc :

$$n = 1 \qquad \text{et} \qquad p = p_1 = 0{,}5.$$

Tant que $p < 0{,}6$, on passe au rang suivant en utilisant la relation de récurrence :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}.$$

La fonction complétée est :

```python
def seuil():
  n = 1
  p = 0.5
  while p < 0.6:
    n = n + 1
    p = (7/15)*p + 1/3
  return n
```

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geqslant 0{,}6$.

Corrigé

On utilise l'expression explicite obtenue précédemment :

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}.$$

Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0{,}6 &\iff \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant \frac{3}{5}\\
&\iff -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant \frac{3}{5} - \frac{5}{8}\\
&\iff -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant \frac{24}{40} - \frac{25}{40}\\
&\iff -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant -\frac{1}{40}\\
&\iff \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \leqslant \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\iff (n-1)\ln\left(\frac{7}{15}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\iff n-1 \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln\left(\frac{7}{15}\right)} \approx 2{,}11.$$

On inverse bien le sens de l'inégalité car :

$$\ln\left(\frac{7}{15}\right) < 0.$$

Donc puisque n est un entier naturel, l'inéquation devient :

$$n-1 \geqslant 3 \iff n \geqslant 4.$$

Les solutions dans $\mathbb{N}^*$ sont donc :

$$\boxed{n \geqslant 4}.$$

La plus petite valeur de n telle que $p_n \geqslant 0{,}6$ est :

$$\boxed{4}.$$

Exercice 2. Vrai/Faux : limites, suites, loi binomiale, intégration, dénombrement — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Affirmation 1 : La fonction f admet pour limite 1 en $+\infty$.

Corrigé

Pour tout réel $x>1$, on a :

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}},$$

Or puisque $x>0$, on a $\sqrt{x^2}=|x|=x$.
Ainsi pour tout réel $x>1$, on factorise les dénominateur et numérateur par le terme dominant qui est non nul :

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\\ &=\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\\ &=\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1 \end{cases} \overset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x)=1.$$

L'affirmation est donc vraie.

$$\boxed{\text{Affirmation 1 vraie}}$$

2. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$w_{n+1} = w_n + 2n + 3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $w_n = (n+1)^2$.

Corrigé

On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$w_n = (n+1)^2.$$

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ la propriété

$$P(n) \ : \ w_n = (n+1)^2.$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque :
  $$w_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad (0+1)^2 = 1.$$
  Donc :
  $$w_0 = (0+1)^2.$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  Remarque

  On admet que :
  * $w_n = (n+1)^2$;
  * $w_{n+1} = w_n + 2n + 3$.

  Et on cherche à montrer que :

  $\boxed{w_{n+1} = (n+2)^2}$ à prouver

  On applique l'hypothèse de récurrence :
  $$w_n = (n+1)^2.$$
  Alors :
  $$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + 2n + 3 \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2. \end{aligned}$$
  On a alors montré que $w_{n+1} = (n+2)^2$, et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion**
  On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (n+1)^2.}$$

L'affirmation est donc vraie.

$\boxed{\text{Affirmation 2 vraie}}$

3. Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 1$.

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 3 et p.

On note $P(X = 1)$ la probabilité de l'événement $(X = 1)$.

Affirmation 3 :

$$P(X = 1) = 3p - 6p^2 + 3p^3.$$

Corrigé

Loi binomiale

Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \qquad \text{avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ici, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3, p)$. Donc :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{3}{1} p^1 (1-p)^{3-1} \\ &= 3p(1-p)^2 \\ &= 3p(1 - 2p + p^2) \\ &= 3p - 6p^2 + 3p^3. \end{aligned}$$

L'affirmation est donc vraie.

$$\boxed{\text{Affirmation 3 vraie}}$$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x.$$

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{\mathrm{e}^{n}}{n}.$$

Corrigé

Primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{nx}$

Pour $n \neq 0$, une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{nx}$ est :

$$x \mapsto \frac{1}{n}\mathrm{e}^{nx}.$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} v_n &= \int_0^1 \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{n}\mathrm{e}^{nx}\right]_0^1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{n}}{n} - \frac{\mathrm{e}^{0}}{n} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{n}}{n} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{n}-1}{n}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\boxed{v_n = \frac{\mathrm{e}^{n}-1}{n}}.$$

L'affirmation proposée oublie le terme $-\dfrac{1}{n}$.
L'affirmation est donc fausse.

$$\boxed{\text{Affirmation 4 fausse}}$$

5. On colorie en rouge, jaune ou noir chacune des 16 cases d'un quadrillage.

Affirmation 5 : On peut réaliser $\binom{16}{3}$ coloriages différents.

Corrigé

Principe multiplicatif

Si une expérience comporte plusieurs choix successifs indépendants, alors le nombre total de possibilités est le produit des nombres de choix possibles à chaque étape.

Pour chacune des 16 cases, il y a 3 choix possibles :

rouge, jaune, noir.

Par principe multiplicatif, le nombre total de coloriages est donc :

$$\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{16 \text{ facteurs}} = 3^{16}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{nombre de coloriages} = 3^{16}}.$$

Le nombre $\binom{16}{3}$ compterait le choix de 3 cases parmi 16, ce qui ne correspond pas à la situation.
L'affirmation est donc fausse.

$$\boxed{\text{Affirmation 5 fausse}}$$

Exercice 3. Géométrie dans l'espace : vecteurs, plans, intersections — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points suivants :

$$A(0;0;1),\quad B(1;2;3),\quad C(3;3;1),\quad E(2;-2;2),$$

$$F(3;0;4)\quad \text{et}\quad G(5;1;2).$$

1. **1. a.** Montrer que les points B, C et E ne sont pas alignés.

Corrigé

Alignement de trois points

Trois points B, C et E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.

On calcule :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

et :

$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2-1\\-2-2\\2-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires. En effet, s'il existait un réel k tel que

$$\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BE},$$

alors on aurait simultanément :

$$2=k\qquad\text{et}\qquad 1=-4k,$$

ce qui est impossible.
Ainsi, les points B, C et E ne sont pas alignés.

$$\boxed{B,\ C \text{ et } E \text{ ne sont pas alignés.}}$$

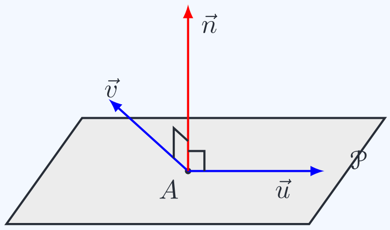
1. b. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est normal au plan (BCE).

Corrigé

Vecteur normal à un plan

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
Autrement dit, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$, alors :

$$\vec{n} \perp \mathcal{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$



On calcule :

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-0 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE).
Calculons les produits scalaires :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC} &= 3 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times (-2) \\ &= 6 - 6 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} &= 3 \times 1 + 0 \times (-4) + 3 \times (-1) \\ &= 3 - 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE).
Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{AF} \text{ est normal au plan } (BCE).}$$

1. c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est :

$$x+z-4=0.$$

Corrigé

Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé, si un plan admet un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$, alors il admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+cz+d=0.$$

Le vecteur

$$\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$$

est normal au plan (BCE). On peut donc prendre comme vecteur normal :

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne du plan (BCE) est donc de la forme :

$$x+z+d=0.$$

Comme $B(1;2;3)$ appartient au plan (BCE), ses coordonnées vérifient l'équation :

$$\begin{aligned}1+3+d=0 &\iff 4+d=0\\ &\iff d=-4.\end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan (BCE) est :

$$\boxed{x+z-4=0.}$$

2.

2. a. Montrer que le point G n'appartient pas au plan (BCE).

Corrigé

On sait qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est :

$$x+z-4=0.$$

On teste les coordonnées du point $G(5;1;2)$:

$$\begin{aligned}x_G+z_G-4&=5+2-4\\&=3.\end{aligned}$$

Comme :

$$3\neq 0,$$

le point G n'appartient pas au plan (BCE).

$$\boxed{G\notin(BCE).}$$

2. b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

Corrigé

- **Objectif.**
On veut montrer que les vecteurs
$$\overrightarrow{BE}, \qquad \overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AG}$$
ne sont pas coplanaires.
Comme $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE), il suffit de montrer que $\overrightarrow{AG}$ n'est pas un vecteur directeur du plan (BCE).

- D'après la question précédente $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCE).
Or tout vecteur directeur du plan (BCE) est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.
Donc, si $\overrightarrow{AG}$ était un vecteur directeur du plan (BCE), on aurait nécessairement :
$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} = 0.$$

- On calcule :
$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}5-0\\1-0\\2-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}.$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} &= 3 \times 5 + 0 \times 1 + 3 \times 1 \\ &= 15 + 3 \\ &= 18.\end{aligned}$$
Donc :
$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} \neq 0.$$

- **Conclusion.**
Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ n'est pas orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{AF}$.
Il ne peut donc pas être un vecteur directeur du plan (BCE).
Par conséquent, $\overrightarrow{AG}$ n'est pas coplanaire avec les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\boxed{\overrightarrow{BE},\ \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ ne sont pas coplanaires.}}$$

2. c. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Corrigé

Le plan (BCE) a pour direction le plan vectoriel engendré par les deux vecteurs non colinéaires :

$$\overrightarrow{BE} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BC}.$$

La droite (AG) a pour vecteur directeur :

$$\overrightarrow{AG}.$$

Si la droite (AG) était parallèle au plan (BCE), alors son vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$ serait coplanaire avec les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$.
Or, d'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.
Donc la droite (AG) n'est pas parallèle au plan (BCE).
Ainsi, la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

$$\boxed{(AG) \text{ et } (BCE) \text{ sont sécants.}}$$

Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE).

3.

3. a. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Corrigé

Représentation paramétrique d'une droite

Si une droite passe par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et admet un vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$, alors une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

La droite (AG) passe par le point :

$$A(0; 0; 1)$$

et admet pour vecteur directeur :

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 5t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.}$$

3. b. En déduire les coordonnées du point P.

Corrigé

Le point P appartient à la droite (AG), donc ses coordonnées sont de la forme :

$$P(5t\ ;\ t\ ;\ 1+t)$$

avec $t \in \mathbb{R}$.
De plus, P appartient au plan (BCE), dont une équation est :

$$x + z - 4 = 0.$$

On remplace x et z par leurs expressions en fonction de t :

$$\begin{aligned} x + z - 4 = 0 &\iff 5t + (1+t) - 4 = 0 \\ &\iff 6t - 3 = 0 \\ &\iff 6t = 3 \\ &\iff t = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$P\left(5 \times \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1 + \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{P\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right).}$$

3. c. Montrer que le point P est le milieu du segment $[EC]$.

Corrigé

Milieu d'un segment dans l'espace

Si $E(x_E; y_E; z_E)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$, alors le milieu M du segment $[EC]$ a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{x_E + x_C}{2}; \frac{y_E + y_C}{2}; \frac{z_E + z_C}{2}\right).$$

Le milieu M du segment $[EC]$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{2+3}{2}; \frac{-2+3}{2}; \frac{2+1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Or :

$$P\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Donc :

$$M = P.$$

Ainsi :

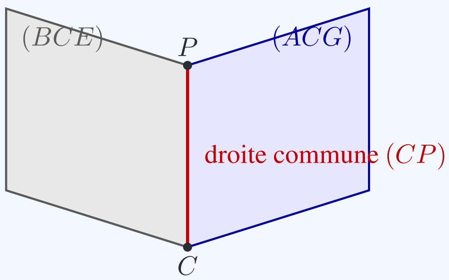
$$\boxed{P \text{ est le milieu du segment } [EC].}$$

4. Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG).

Corrigé

Intersection de deux plans

Deux plans distincts de l'espace qui ont deux points distincts en commun sont sécants suivant la droite passant par ces deux points.



- **Objectif.**

  On cherche l'intersection des deux plans (BCE) et (ACG).

  L'idée est de trouver deux points distincts appartenant aux deux plans. La droite passant par ces deux points sera alors la droite d'intersection, à condition que les deux plans soient distincts.

- **Premier point commun.**

  Le point C appartient au plan (BCE) par définition.

  De plus, le point C appartient aussi au plan (ACG) par définition.

  Ainsi :

  $$C \in (BCE) \qquad \text{et} \qquad C \in (ACG).$$

  Donc C est un point commun aux deux plans.

- **Deuxième point commun.**

  Le point P appartient au plan (BCE), puisque P est le point d'intersection de la droite (AG) avec le plan (BCE).

  De plus, la droite (AG) est contenue dans le plan (ACG), car ce plan est défini par les trois points A, C et G.

  Comme $P \in (AG)$, on en déduit :

  $$P \in (ACG).$$

  Ainsi :

  $$P \in (BCE) \qquad \text{et} \qquad P \in (ACG).$$

  Donc P est aussi un point commun aux deux plans.

- **Les deux points communs sont distincts.**

  On a :

  $$C(3;3;1) \qquad \text{et} \qquad P\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right).$$

  Ces deux points n'ont pas les mêmes coordonnées, donc :

  $$C \neq P.$$

  Les deux plans ont donc deux points distincts en commun : C et P.

- **Les deux plans sont distincts.**
  On sait que le plan (BCE) a pour équation :
  $$x + z - 4 = 0.$$
  Or le point A a pour coordonnées $A(0;0;1)$, donc :
  $$\begin{aligned} x_A + z_A - 4 &= 0 + 1 - 4 \\ &= -3. \end{aligned}$$
  Ainsi :
  $$x_A + z_A - 4 \neq 0,$$
  donc :
  $$A \notin (BCE).$$
  Comme $A \in (ACG)$ mais $A \notin (BCE)$, les deux plans (BCE) et (ACG) sont bien distincts.

- **Conclusion géométrique.**
  Les deux plans (BCE) et (ACG) sont distincts et ont deux points distincts en commun : C et P.
  Ils sont donc sécants suivant la droite passant par C et P.
  $$\boxed{(BCE) \cap (ACG) = (CP).}$$

- **Représentation paramétrique de la droite d'intersection.**
  On calcule :
  $$\overrightarrow{CP}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 3 \\ \frac{1}{2} - 3 \\ \frac{3}{2} - 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CP}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
  Un vecteur directeur de la droite (CP) est donc : $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  Comme la droite (CP) passe par $C(3;3;1)$, une représentation paramétrique de l'intersection est :
  $$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 3 - 5t \\ z = 1 + t \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 4. Fonctions trigonométriques, variations, TVI, inégalité — 5 points

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

1. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 2\pi]$, on a :

$$g'(x) = -x\sin(x).$$

Corrigé

Pour tout réel $x \in [0; 2\pi]$, on a :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x).$$

La fonction $x \mapsto x\cos(x)$ est un produit de fonctions dérivables. Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x\cos(x))' - (\sin(x))' \\ &= \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = -x\sin(x)}.$$

1. b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ ci-dessous. Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0		π		2π
g	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

La fonction g est décroissante sur $[0; \pi]$ puis croissante sur $[\pi; 2\pi]$.

Corrigé

Lien entre signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

- **Signe de la dérivée.**
  D'après la question précédente, pour tout $x \in [0; 2\pi]$:

  $$g'(x) = -x\sin(x).$$

  Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, on a :

  $$x \geqslant 0.$$

  De plus :

  $$\sin(x) \geqslant 0 \quad \text{sur } [0; \pi], \qquad \sin(x) \leqslant 0 \quad \text{sur } [\pi; 2\pi].$$

Donc :

$$g'(x) \leqslant 0 \quad \text{sur } [0;\pi], \qquad g'(x) \geqslant 0 \quad \text{sur } [\pi;2\pi].$$

Ainsi, g est décroissante sur $[0;\pi]$ puis croissante sur $[\pi;2\pi]$.

- **Valeurs aux bornes.**
  On calcule :

$$\begin{aligned} g(0) &= 0\cos(0) - \sin(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} g(\pi) &= \pi\cos(\pi) - \sin(\pi) \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} g(2\pi) &= 2\pi\cos(2\pi) - \sin(2\pi) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

- **Conclusion.**
  On obtient bien le tableau de variations suivant :

x	0		π		2π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
g	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

1. c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$ telle que :

$$g(\alpha) = 0.$$

Corrigé

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$,
alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque 1 *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*
Remarque 2 *: On a longtemps pensé que la réciproque du théorème était vraie, et que la propriété des valeurs intermédiaires caractérisait les fonctions continues. Ce n'est qu'en 1875 que Darboux en donna un contre-exemple dans son article "Mémoire sur les fonctions discontinues".*

x	0		π		α		2π
g	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2π

- **Continuité et monotonie.**
  La fonction g est dérivable sur $[0; 2\pi]$, donc elle est continue sur $[\pi; 2\pi]$.
  D'après le tableau de variations justifié à la question précédente, la fonction g est strictement croissante sur $[\pi; 2\pi]$.
- **Encadrement de 0.**
  On a :
  $$g(\pi) = -\pi < 0 \qquad \text{et} \qquad g(2\pi) = 2\pi > 0.$$
  Donc 0 est compris entre $g(\pi)$ et $g(2\pi)$.
- **Application du corollaire du TVI.**
  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation
  $$g(x) = 0$$
  admet une unique solution dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$.
  On la note α.

$$\boxed{\exists!\, \alpha \in [\pi; 2\pi] \quad \text{tel que} \quad g(\alpha) = 0.}$$

1. d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Corrigé

x	0		π		α		2π
g	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2π

- **Sur l'intervalle $[0; \alpha]$.**
  La fonction g est négative sur l'intervalle $[0; \alpha]$ car de maximum 0 (atteint en 0 et en α).
- **Sur l'intervalle $[\alpha; 2\pi]$.**
  La fonction g est croissante sur $[\alpha; 2\pi]$ et de minimum $g(\alpha) = 0$, donc elle est positive.
- **Conclusion.**
  On obtient le tableau de signes suivant :

x	0		α		2π
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; 2\pi]$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Corrigé

Dérivée d'un quotient

Si u et v sont deux fonctions dérivables et si v ne s'annule pas, alors :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Pour tout $x \in]0; 2\pi]$, on a :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

On pose :

$$u(x) = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = x.$$

Alors :

$$u'(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 1.$$

Comme $x > 0$, on peut dériver le quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}.$$

2. b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0; 2\pi]$.

Corrigé

- **Signe du dénominateur.**
  Pour tout $x \in]0; 2\pi]$, on a :
  $$x^2 > 0.$$
- **Lien avec le signe de g.**
  D'après la question précédente :
  $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$
  Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.
- **Conclusion.**
  D'après le tableau de signes de g :
  $$f'(x) < 0 \quad \text{sur }]0; \alpha[,$$
  $$f'(\alpha) = 0,$$
  et :
  $$f'(x) > 0 \quad \text{sur }]\alpha; 2\pi].$$
  Ainsi :

x	0		α		2π
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

2. c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; 2\pi]$.

Corrigé

- **Utilisation du signe de f'.**
  D'après la question précédente :
  $$f'(x) < 0 \quad \text{sur }]0; \alpha[$$
  et :
  $$f'(x) > 0 \quad \text{sur }]\alpha; 2\pi].$$
- **Conclusion.**
  Donc la fonction f est décroissante sur $]0; \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha; 2\pi]$.
  De plus :
  $$f(2\pi) = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} = 0.$$

On peut résumer les variations ainsi :

x	0		α		2π
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

2. d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Corrigé

Taux d'accroissement et nombre dérivé

Si une fonction h est dérivable en a, alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(a).$$

Pour tout $x \in]0;2\pi]$, on a :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Or :

$$\sin(0) = 0.$$

Donc :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}.$$

Ainsi, lorsque x tend vers 0^+, ce quotient est le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.
Comme la fonction sinus est dérivable en 0 et que :

$$\sin'(0) = \cos(0) = 1,$$

on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1}.$$

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité :

$$0 < r < s < \pi.$$

Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}.$$

Corrigé

- **Idée.**
  On va utiliser les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

x	0		α		2π
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ 1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

  Donc f est strictement décroissante sur $]0;\pi[$.

- **Application à r et s.**
  On sait que :

$$0 < r < s < \pi.$$

  Comme f est strictement décroissante sur $]0;\pi[$, on obtient :

$$f(r) > f(s).$$

  Donc :

$$\frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s}.$$

- **Transformation de l'inégalité.**
  Comme $r > 0$ et $s > 0$, on peut multiplier par $rs > 0$ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s} &\iff s\sin(r) > r\sin(s)\\ &\iff \frac{\sin(r)}{\sin(s)} > \frac{r}{s}.\end{aligned}$$

  On a bien le droit de diviser par $\sin(s)$, car :

$$0 < s < \pi \quad \Longrightarrow \quad \sin(s) > 0.$$

- **Conclusion.**
  On a donc montré que :

$$\boxed{\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}}.$$

Fin du devoir