BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

Exercice 1 **5 points**

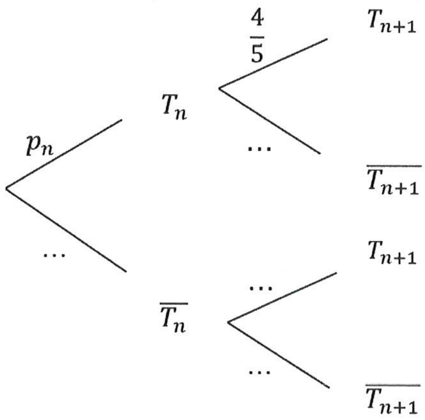
Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. On considère ci-dessous une fonction `seuil`, incomplète, écrite en langage Python. Recopier cette fonction sur la copie en complétant les pointillés afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que p_n soit supérieur ou égal à 0,6.

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while .........:
        n = .........
        p = .........
    return .........
```

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geq 0{,}6$.

Exercice 2 **5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Affirmation 1 : La fonction f admet pour limite 1 en $+\infty$.

2. On considère la suite (w_n) définie par $w_0=1$ et pour tout entier naturel n par :

$$w_{n+1}=w_n+2n+3$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $w_n=(n+1)^2$.

3. Soit p un nombre réel tel que $0<p<1$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres 3 et p.
On note $P(X=1)$ la probabilité de l'évènement $(X=1)$.

Affirmation 3 : $P(X=1)=3p-6p^2+3p^3$.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n\geq 1$ par :

$$v_n=\int_0^1 \mathrm{e}^{nx}dx$$

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel $n\geq 1$,

$$v_n=\frac{\mathrm{e}^n}{n}$$

5. On colorie en rouge, jaune ou noir chacune des 16 cases d'un quadrillage.

Affirmation 5 : On peut réaliser $\binom{16}{3}$ coloriages différents.

Exercice 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace, on considère les points suivants $\mathrm{A}(0;0;1)$; $\mathrm{B}(1;2;3)$; $\mathrm{C}(3;3;1)$; $\mathrm{E}(2;-2;2)$; $\mathrm{F}(3;0;4)$ et $\mathrm{G}(5;1;2)$.

1. **a.** Montrer que les points B, C et E ne sont pas alignés.

   b. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ est normal au plan (BCE).

   c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est $x + z - 4 = 0$.

2. **a.** Montrer que le point G n'appartient pas au plan (BCE).

   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ ne sont pas coplanaires.

   c. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE).

3. **a.** Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

   b. En déduire les coordonnées du point P.

   c. Montrer que le point P est le milieu du segment $[\mathrm{EC}]$.

4. Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG).

Exercice 4 **5 points**

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ par :

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$, on a $g'(x) = -x\sin(x)$.

b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ ci-dessous.

Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0		π		2π
g	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi\,;\,2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;\,2\pi]$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,2\pi]$.

d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.

Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$