Math93.com

Baccalauréat 2026 - Spécialité Maths Correction Asie

Sujet 2 - 10 Juin 2026

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Mathématiques

Spécialité Mathématiques

Corrigé détaillé

Asie – 10 Juin 2026

Sujet 2

SESSION	DURÉE	BARÈME
2026	**4 heures**	**20 points**

Exercice	Thème principal	Points
Exercice 1	Fonction rationnelle et suite récurrente	5 points
Exercice 2	Probabilités, loi binomiale et fonction	5 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	5 points
Exercice 4	Vrai-Faux : convexité, dénombrement, probabilités et équations différentielles	5 points
Total	**Sujet complet**	**20 points**

Bac 2026

Tous les sujets, corrigés, fichiers LaTeX et bilans de notions de la session 2026 sont disponibles sur la page mère :

Annales Bac Maths 2026 – sujets, corrigés, fichiers LaTeX et notions évaluées

Conseil : le jour de l'épreuve, il faut numéroter clairement les questions, justifier chaque réponse, soigner les calculs et encadrer les résultats importants.

Exercice 1. Fonction rationnelle et suite récurrente — 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	$\dfrac{3}{2}$
f	$\dfrac{1}{2}$ $\nearrow$ $+\infty$	‖

Corrigé

Pour tout réel $x < \dfrac{3}{2}$, on a :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

- **Dérivée et sens de variation.**
  La fonction f est dérivable sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$, et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (2x-3) - (x-2) \times 2}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{1}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

  Or, pour tout réel $x < \dfrac{3}{2}$:

$$(2x-3)^2 > 0.$$

  Donc :

$$f'(x) > 0.$$

  Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur :

$$\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[.$$

- **Limite en $-\infty$.**
  Pour tout réel x non nul (on cherche la limite en $-\infty$ donc on peut prendre x non nul) :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3} = \frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{1-\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{3}{x}}.$$

  On a :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2-\dfrac{3}{x}\right) = 2 \end{array}\right. \overset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

- **Limite en $\mathbf{\dfrac{3}{2}^-}$.**

  Lorsque $x \to \dfrac{3}{2}^-$, on a :

$$x-2 \to -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 2x-3 \to 0^-.$$

  Donc :

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} \frac{x-2}{2x-3} = +\infty.$$

Ces résultats justifient le tableau de variation donné dans l'énoncé.

2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$f(x) \in [0\,;\,1].$$

Corrigé

On a :

$$[0\,;\,1] \subset \left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right[.$$

D'après la question précédente, la fonction f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$, donc elle est croissante sur $[0\,;\,1]$.
Ainsi, pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1).$$

Or :

$$f(0) = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad f(1) = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Donc, pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$\frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

En particulier :

$$\boxed{f(x) \in [0\,;\,1].}$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. En utilisant la fonction f, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

Corrigé

On remarque que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On définit, pour tout entier naturel n, la propriété :

$$P(n) : \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

- **Initialisation.**
  On a :
  $$u_0 = 0.$$
  De plus :
  $$u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{2}{3}.$$
  Donc :
  $$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1.$$
  Ainsi, $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.
  On suppose donc :
  $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$
  D'après la partie A, la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.
  Ainsi :
  $$u_n \leqslant u_{n+1} \Longrightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}).$$
  Donc :
  $$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$
  De plus, comme $u_{n+1} \in [0\ ;\ 1]$, la partie A donne :
  $$f(u_{n+1}) \in [0\ ;\ 1].$$
  Donc :
  $$u_{n+2} \in [0\ ;\ 1].$$
  On obtient finalement :
  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1.$$
  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.**
  La propriété $P(0)$ est vraie et elle est héréditaire.
  Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n :
  $$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.}$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

Corrigé

Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée par M converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant M$.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que :

$$\ell \leqslant 1.$$

De plus, comme pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n,$$

on obtient aussi :

$$0 \leqslant \ell.$$

Ainsi :

$$\boxed{0 \leqslant \ell \leqslant 1.}$$

En particulier, la suite (u_n) converge.

3. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
En admettant que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, montrer que :

$$\ell = 1.$$

Corrigé

On résout l'équation :

$$f(x) = x$$

sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a $2x - 3 \neq 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff \frac{x-2}{2x-3} = x \\
&\iff x - 2 = x(2x-3) \\
&\iff x - 2 = 2x^2 - 3x \\
&\iff 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\
&\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\
&\iff (x-1)^2 = 0 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

La seule solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0\,;\,1]$ est donc 1.
Comme ℓ est solution de cette équation sur $[0\,;\,1]$, on en déduit :

$$\boxed{\ell = 1.}$$

4. On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```python
def seuil(h):
    n = 0
    u = 0
    while u < 1 - h:
        n = n + 1
        u = (u - 2)/(2*u - 3)
    return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur $5\,000$.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

La fonction `seuil(h)` calcule les termes successifs de la suite (u_n) tant que :

$$u_n < 1 - h.$$

Elle renvoie donc le plus petit entier naturel n tel que :

$$u_n \geqslant 1 - h.$$

Ici :

$$h = 0,0001.$$

Donc :

$$1 - h = 0,9999.$$

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie $5\,000$.
Cela signifie que $5\,000$ est le plus petit rang à partir duquel :

$$u_n \geqslant 0,9999.$$

Comme la suite (u_n) est croissante, on peut aussi dire que :

$$u_{4999} < 0,9999 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 5000, \quad u_n \geqslant 0,9999.$$

Ainsi, à partir du rang $5\,000$, les termes de la suite sont à moins de $0,0001$ de leur limite 1.

$$\boxed{\text{Le seuil } 0,9999 \text{ est atteint pour la première fois au rang } 5\,000.}$$

5.

5. a. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) sous forme de fractions irréductibles.

Corrigé

On calcule successivement :

$$u_0 = 0.$$

Puis :

$$u_1 = \frac{u_0 - 2}{2u_0 - 3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1 - 2}{2u_1 - 3} \\ &= \frac{\frac{2}{3} - 2}{2 \times \frac{2}{3} - 3} \\ &= \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{u_2 - 2}{2u_2 - 3} \\ &= \frac{\frac{4}{5} - 2}{2 \times \frac{4}{5} - 3} \\ &= \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{7}{5}} \\ &= \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

Les quatre premiers termes sont donc :

$$\boxed{u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{2}{3}, \quad u_2 = \frac{4}{5}, \quad u_3 = \frac{6}{7}.}$$

5. b. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

Corrigé

Les premiers termes obtenus sont :

$$0,\quad \frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{6}{7}.$$

On conjecture que, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_n = \frac{2n}{2n+1}.}$$

Démontrons cette conjecture par récurrence.
On définit, pour tout entier naturel n, la propriété :

$$P(n):\quad u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

- **Initialisation.**

  Pour $n = 0$, on a :

  $$\frac{2n}{2n+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

  Or :

  $$u_0 = 0.$$

  Donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité.**

  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  On suppose donc :

  $$u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

  Alors :

  $$\begin{aligned}
  u_{n+1} &= \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} \\
  &= \frac{\dfrac{2n}{2n+1} - 2}{2 \times \dfrac{2n}{2n+1} - 3} \\
  &= \frac{\dfrac{2n - 2(2n+1)}{2n+1}}{\dfrac{4n - 3(2n+1)}{2n+1}} \\
  &= \frac{-2n-2}{-2n-3} \\
  &= \frac{2n+2}{2n+3} \\
  &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}.
  \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.**

  La propriété P est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire.

  Donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n :

  $$\boxed{u_n = \frac{2n}{2n+1}.}$$

Exercice 2. Probabilités, loi binomiale et fonction — 5 points

On pourra traiter indépendamment les deux parties de l'exercice.
On arrondira, si nécessaire, les résultats à 10^{-3} près.
Dans cet exercice, on s'intéresse aux lancers-francs effectués par un joueur lors de compétitions de basketball.
Pour modéliser la situation, on considère dans chaque partie du problème que les conditions dans lesquelles s'effectuent ces lancers sont identiques et que ces lancers sont indépendants deux à deux.

Partie A

Les statistiques de réussite des lancers-francs d'un joueur sont de $49,2\,\%$ lors d'une saison.
Dans cette partie, on assimilera cette fréquence à sa probabilité de réussite d'un lancer-franc.
Au cours d'un match, ce joueur tente 16 lancers-francs.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur lors de ce match.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Corrigé

Épreuve de Bernoulli et loi binomiale

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui possède exactement deux issues :

- le **succès**, de probabilité p ;
- l'**échec**, de probabilité $1-p$.

Lorsqu'on répète n fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli, on obtient un **schéma de Bernoulli**.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus au cours de ces n répétitions suit alors une **loi binomiale** de paramètres n et p, notée :

$$X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ p).$$

- **Épreuve de Bernoulli.**
  Pour chaque lancer-franc, on considère le succès :

  « le lancer-franc est réussi ».

  La probabilité de succès est :
  $$p = 0,492.$$
- **Répétition indépendante.**
  Le joueur effectue 16 lancers-francs dans des conditions identiques, et l'énoncé précise que ces lancers sont indépendants deux à deux.
- **Conclusion.**
  La variable aléatoire X compte le nombre de succès parmi 16 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
  Donc :
  $$\boxed{X \sim \mathcal{B}(16\ ;\ 0,492)}$$

2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et l'interpréter dans le contexte de cet exercice.

Corrigé

Espérance d'une loi binomiale

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors :

$$E(X) = np.$$

Ici :

$$X \sim \mathcal{B}(16\ ;\ 0,492).$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= 16 \times 0,492 \\ &= 7,872. \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = 7,872}$$

Cela signifie que, sur un grand nombre de matchs comparables où le joueur tente 16 lancers-francs, il réussira en moyenne environ :

$$\boxed{7,872 \text{ lancers-francs}}$$

par match, soit environ 8 lancers-francs.

3. Calculer $P(X = 5)$.

Corrigé

Probabilités dans une loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On a :

$$X \sim \mathcal{B}(16\ ;\ 0,492).$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{16}{5}(0,492)^5(1 - 0,492)^{16-5} \\ &= \binom{16}{5}(0,492)^5(0,508)^{11} \\ &\approx 0,0732165. \end{aligned}$$

Ainsi, à 10^{-3} près :

$$\boxed{P(X = 5) \approx 0,073}$$

4. Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins six lancers-francs.

Corrigé

On cherche :

$$P(X \geqslant 6).$$

On utilise l'événement contraire :

$$P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5).$$

À la calculatrice, on obtient :

$$P(X \geqslant 6) \approx 0,8827387.$$

Donc, à 10^{-3} près :

$$\boxed{P(X \geqslant 6) \approx 0,883}$$

Partie B

On note p la probabilité que le joueur réussisse un lancer-franc, où p est un réel tel que :

$$0 \leqslant p \leqslant 1.$$

On se place dans le cas où le joueur effectue 3 lancers-francs.
On désigne par Y la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur.

1. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

Corrigé

Le joueur effectue 3 lancers-francs.
La variable aléatoire Y compte le nombre de lancers-francs réussis.
Elle peut donc prendre les valeurs :

$$\boxed{0,\ 1,\ 2,\ 3}$$

2. Exprimer $P(Y = 2)$ en fonction de p.

Corrigé

L'événement $(Y = 2)$ correspond à la réussite de deux lancers-francs parmi les trois.
Il y a :

$$\binom{3}{2} = 3$$

façons de choisir les deux lancers réussis.
Donc :

$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} p^2(1 - p).$$

Ainsi :

$$\boxed{P(Y = 2) = 3p^2(1 - p)}$$

3. Donner la loi de probabilité de Y. Présenter la réponse sous forme de tableau.

Corrigé

Comme Y compte le nombre de succès parmi 3 lancers-francs indépendants et de même probabilité de réussite p, on a :

$$Y \sim \mathcal{B}(3\ ;\ p).$$

Donc, pour tout entier $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$:

$$P(Y = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}.$$

On obtient la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

4. Montrer que :

$$P(Y \geqslant 2) = -2p^3 + 3p^2.$$

Corrigé

On a :

$$P(Y \geqslant 2) = P(Y = 2) + P(Y = 3).$$

D'après la loi de probabilité obtenue :

$$P(Y = 2) = 3p^2(1-p) \qquad \text{et} \qquad P(Y = 3) = p^3.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 2) &= 3p^2(1-p) + p^3 \\ &= 3p^2 - 3p^3 + p^3 \\ &= -2p^3 + 3p^2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(Y \geqslant 2) = -2p^3 + 3p^2}$$

5. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2.$$

5. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les valeurs aux bornes de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Corrigé

La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$, et pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 6x \\ &= 6x(1-x). \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$:

$$x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 1 - x \geqslant 0.$$

Donc :

$$f'(x) \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

De plus :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = -2 + 3 = 1.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1
$f'(x)$	0	$+$	0
f	0	$\nearrow$	1

5. b. En déduire l'existence d'une unique valeur α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ telle que :

$$f(\alpha) = 0,9.$$

Corrigé

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation :

$$f(x) = k$$

admet une **unique** solution dans $[a\,;\,b]$.

La fonction f est polynomiale, donc continue sur $[0\,;\,1]$.
De plus, d'après la question précédente, f est croissante sur $[0\,;\,1]$, et même strictement croissante sur $[0\,;\,1]$ puisque :

$$f'(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in]0\,;\,1[.$$

Enfin :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = 1.$$

Or :

$$0 < 0,9 < 1.$$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation :

$$f(x) = 0,9$$

admet une unique solution dans $[0\,;\,1]$.
On note cette solution α.

$$\boxed{\text{Il existe une unique valeur } \alpha \in [0\,;\,1] \text{ telle que } f(\alpha) = 0,9.}$$

x	0		α		1
$f'(x)$	0		$+$		0
f	0	$\nearrow$	0.9	$\nearrow$	1

5. c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette valeur α.

Corrigé

À la calculatrice, on obtient :

$$f(0,80) = -2(0,80)^3 + 3(0,80)^2 = 0,896$$

et :

$$f(0,81) = -2(0,81)^3 + 3(0,81)^2 = 0,905418.$$

Donc :

$$f(0,80) < 0,9 < f(0,81).$$

Comme f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$, on en déduit :

$$\boxed{0,80 < \alpha < 0,81}$$

Cet encadrement est d'amplitude :

$$0,81 - 0,80 = 0,01 = 10^{-2}.$$

5. d. Interpréter la valeur de α dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

Dans la partie B, on a montré que :

$$P(Y \geqslant 2) = -2p^3 + 3p^2 = f(p).$$

La valeur α vérifie :

$$f(\alpha) = 0,9.$$

Elle correspond donc à la probabilité de réussite d'un lancer-franc à partir de laquelle la probabilité de réussir au moins deux lancers-francs sur trois est égale à $0,9$.
Comme :

$$0,80 < \alpha < 0,81,$$

il faut que la probabilité de réussite d'un lancer-franc soit d'environ $80,5\,\%$ pour avoir $90\,\%$ de chances de réussir au moins deux lancers-francs sur trois.

$$\boxed{\alpha \text{ est le seuil de réussite d'un lancer-franc permettant d'obtenir } P(Y \geqslant 2) = 0,9.}$$

Exercice 3. Géométrie dans l'espace — 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(1\ ;\ 2\ ;\ 3),\quad B(-1\ ;\ 3\ ;\ 1),\quad C(2\ ;\ 1\ ;\ 6)\quad \text{et}\quad D(3\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

1. **1. a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

Corrigé

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix}\quad \text{soit}\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},$$

et :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\1-2\\6-3\end{pmatrix}\quad \text{soit}\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, par exemple :

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1}.$$

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
Ainsi, ils définissent un plan.

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ définissent un plan.}}$$

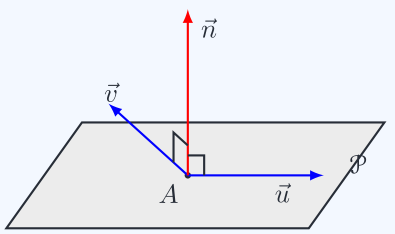
1. b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ 4\ ;\ 1)$ est normal au plan (ABC).

Corrigé

Vecteur normal à un plan

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
Autrement dit, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$, alors :

$$\vec{n} \perp \mathcal{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u} = 0\\ \vec{n}\cdot\vec{v} = 0\end{cases}$$



On sait que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

On calcule :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} &= 1\times(-2)+4\times 1+1\times(-2)\\ &= -2+4-2\\ &= 0,\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} &= 1\times 1+4\times(-1)+1\times 3\\ &= 1-4+3\\ &= 0.\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).
Ainsi :

$$\boxed{\vec{n}(1\ ;\ 4\ ;\ 1) \text{ est normal au plan } (ABC).}$$

1. c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Corrigé

Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé de l'espace, si un plan admet un vecteur normal de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$, alors une équation cartésienne de ce plan est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0.$$

Le plan (ABC) admet pour vecteur normal :

$$\vec{n}(1\ ;\ 4\ ;\ 1).$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc de la forme :

$$x+4y+z+d=0.$$

Or $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ appartient au plan (ABC).
Donc :

$$\begin{aligned}1+4\times 2+3+d=0 &\iff 12+d=0\\ &\iff d=-12.\end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$\boxed{x+4y+z-12=0.}$$

2.

2. a. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d), perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D.

Corrigé

Droite perpendiculaire à un plan

Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle admet pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan.

La droite (d) est perpendiculaire au plan (ABC).
Or le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ 4\ ;\ 1)$ est normal au plan (ABC).
Donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (d).
Comme (d) passe par $D(3\ ;\ -2\ ;\ -1)$, une représentation paramétrique de (d) est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

2. b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

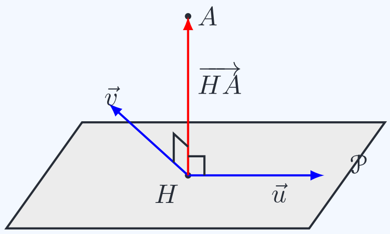
Corrigé

Projeté orthogonal sur un plan

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan.
On appelle **projeté orthogonal** de A sur le plan $\mathcal{P}$ le point H du plan $\mathcal{P}$ tel que :

$$H \in \mathcal{P} \qquad \text{et} \qquad (AH) \perp \mathcal{P}.$$

Autrement dit, H est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite passant par A et dirigée par un vecteur normal au plan.



Le point H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
Il appartient donc à la droite (d) déterminée à la question précédente et au plan (ABC).
Ainsi, il existe un réel t tel que :

$$H(3 + t\ ;\ -2 + 4t\ ;\ -1 + t).$$

Comme H appartient au plan (ABC), d'équation :

$$x + 4y + z - 12 = 0,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} (3 + t) + 4(-2 + 4t) + (-1 + t) - 12 = 0 &\iff 3 + t - 8 + 16t - 1 + t - 12 = 0 \\ &\iff -18 + 18t = 0 \\ &\iff t = 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$H(3+1\ ;\ -2+4\times 1\ ;\ -1+1).$$

Ainsi :

$$\boxed{H(4\ ;\ 2\ ;\ 0).}$$

2. c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.

Corrigé

La distance du point D au plan (ABC) est la longueur DH, où H est le projeté orthogonal de D sur ce plan.
On a :

$$D(3\ ;\ -2\ ;\ -1) \qquad \text{et} \qquad H(4\ ;\ 2\ ;\ 0).$$

Donc :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{(4-3)^2+(2-(-2))^2+(0-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1^2+4^2+1^2} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{d\,(D\ ;\ (ABC)) = 3\sqrt{2}.}$$

3.

3. a. Montrer que :

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

Corrigé

Produit scalaire et angle

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta),$$

où θ est l'angle formé par les deux vecteurs.

On utilise les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (-2)\times 1 + 1\times(-1) + (-2)\times 3 \\ &= -2-1-6 \\ &= -9. \end{aligned}$$

De plus :

$$AB = \sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2} = 3,$$

et :

$$AC = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{BAC}\right) &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}\\ &= \frac{-9}{3\sqrt{11}}\\ &= -\frac{3}{\sqrt{11}}\\ &= -\frac{3\sqrt{11}}{11}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\cos\left(\widehat{BAC}\right) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}.}$$

3. b. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$.

Corrigé

L'angle $\widehat{BAC}$ est un angle géométrique, donc :

$$\sin\left(\widehat{BAC}\right) \geqslant 0.$$

On utilise :

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\widehat{BAC}\right) &= 1 - \cos^2\left(\widehat{BAC}\right)\\ &= 1 - \left(-\frac{3\sqrt{11}}{11}\right)^2\\ &= 1 - \frac{99}{121}\\ &= \frac{22}{121}.\end{aligned}$$

Comme $\sin\left(\widehat{BAC}\right) \geqslant 0$, on obtient :

$$\boxed{\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\sqrt{22}}{11}.}$$

3. c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

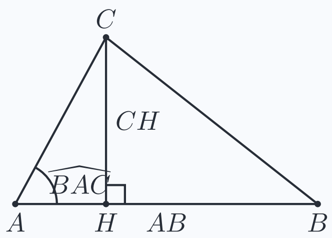
Corrigé

Aire d'un triangle

L'aire d'un triangle est donnée par :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur associée}.$$

- On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



- Dans le triangle ACH rectangle en H, on a :

$$\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{CH}{AC}.$$

Donc :

$$CH = AC \sin\left(\widehat{BAC}\right).$$

- D'après les questions précédentes :

$$AB = 3, \qquad AC = \sqrt{11}$$

et :

$$\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\sqrt{22}}{11}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} CH &= AC \sin\left(\widehat{BAC}\right) \\ &= \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{22}}{11} \\ &= \frac{\sqrt{242}}{11} \\ &= \frac{11\sqrt{2}}{11} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

- **Calcul de l'aire.**
En prenant $[AB]$ pour base et CH pour hauteur associée, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2} \times AB \times CH \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

- **Conclusion.**

$$\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.}$$

4. Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur qui lui est associée.

Corrigé

On choisit pour base le triangle ABC.
D'après la question précédente :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

La hauteur associée à cette base est la distance du point D au plan (ABC).
D'après la question 2.c :

$$h = d\,(D\,;\,(ABC)) = 3\sqrt{2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2}\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{18}{2}\\ &= 3.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{V}_{ABCD} = 3.}$$

Exercice 4. Vrai-Faux : convexité, dénombrement, probabilités et équations différentielles — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.
Les quatre questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^5.$$

Affirmation 1 : La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
Si f est convexe sur I, alors sa dérivée seconde est positive ou nulle sur I :

$$f''(x) \geqslant 0.$$

Pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^5.$$

On dérive :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^4. \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{5}{2} \times 4\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 5\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)^3. \end{aligned}$$

Or, par exemple :

$$f''(7) = 5\left(-\frac{7}{2} + 3\right)^3 = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{5}{8} < 0.$$

Donc f'' n'est pas positive sur $\mathbb{R}$.
La fonction f n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est FAUSSE.}}$

2. Une urne contient 32 jetons numérotés de 1 à 32 indiscernables au toucher.

On tire simultanément 5 jetons de cette urne.

On appelle tirage la liste non ordonnée des numéros des cinq jetons tirés.

Affirmation 2 : Le nombre de tirages possibles contenant au moins un multiple de 8 est égal à 103 096.

Corrigé

Combinaisons

Le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets, sans tenir compte de l'ordre, est :

$$\binom{n}{k}.$$

Les multiples de 8 compris entre 1 et 32 sont :

$$8, \quad 16, \quad 24, \quad 32.$$

Il y en a donc 4.
Ainsi, il y a :

$$32 - 4 = 28$$

jetons qui ne sont pas des multiples de 8.

- Le nombre total de tirages possibles est :

$$\binom{32}{5}.$$

- Le nombre de tirages ne contenant aucun multiple de 8 est :

$$\binom{28}{5}.$$

Donc le nombre de tirages contenant au moins un multiple de 8 est :

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5}.$$

Or :

$$\binom{32}{5} = 201\,376 \qquad \text{et} \qquad \binom{28}{5} = 98\,280.$$

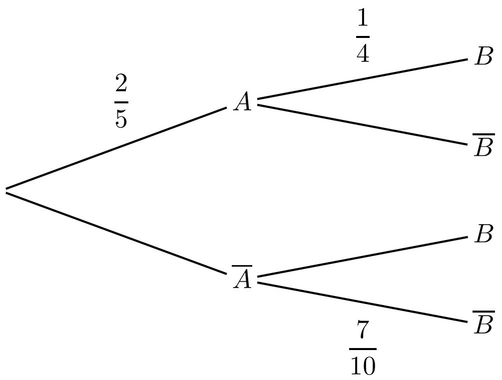
Donc :

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 201\,376 - 98\,280 = 103\,096.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'affirmation 2 est VRAIE.}}$$

3. On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.

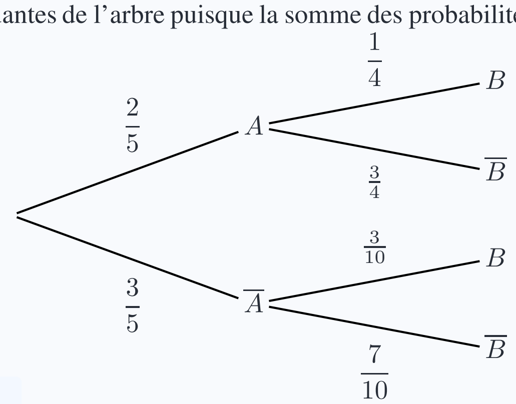


Affirmation 3 :

$$P_B\left(\overline{A}\right) = \frac{9}{50}.$$

Corrigé

On peut compléter les données manquantes de l'arbre puisque la somme des probabilités des branches issues du même noeud est égal à 1 :



Probabilité conditionnelle

Si $P(B) \neq 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

- On calcule :
$$P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) P_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}.$$
- Calculons $P(B)$:
Les évènement A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{50} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{50} \\ &= \frac{5}{50} + \frac{9}{50} \\ &= \frac{14}{50}. \end{aligned}$$

- Donc :

$$\begin{aligned} P_B\left(\overline{A}\right) &= \frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} \\ &= \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P_B\left(\overline{A}\right) = \frac{9}{14} \neq \frac{9}{50}.$$

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est FAUSSE.}}$

4. On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' + y = e^{-x}\cos(x),$$

où y est une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. a. Affirmation 4 : La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{-x}\sin(x)$$

est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(e^{-x}\right)'\sin(x) + e^{-x}\left(\sin(x)\right)' \\ &= -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} h'(x) + h(x) &= -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\sin(x) \\ &= e^{-x}\cos(x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$h'(x) + h(x) = e^{-x}\cos(x).$$

La fonction h est donc solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{L'affirmation 4 est VRAIE.}}$

4. b. Affirmation 5 : Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = Ce^{-x}\sin(x),$$

où C est une constante réelle.

Corrigé

D'après la question précédente, la fonction :

$$h(x) = e^{-x}\sin(x)$$

est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' + y = e^{-x}\cos(x).$$

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Les solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre sont obtenues en ajoutant :

- une solution particulière de l'équation avec second membre ;
- les solutions de l'équation homogène associée.

L'équation homogène associée est :

$$y' + y = 0.$$

Ses solutions sont :

$$x \mapsto Ce^{-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Donc les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = e^{-x}\sin(x) + Ce^{-x}.$$

Autrement dit :

$$y(x) = e^{-x}\left(\sin(x) + C\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ce ne sont donc pas les fonctions de la forme :

$$k(x) = Ce^{-x}\sin(x).$$

$$\boxed{\text{L'affirmation 5 est FAUSSE.}}$$

Remarque

On pouvait aussi conclure plus rapidement par un contre-exemple.
Si l'affirmation 5 était vraie, alors pour $C = 0$, la fonction nulle :

$$k(x) = 0$$

serait solution de (E).
Or :

$$k'(x) + k(x) = 0,$$

tandis que :

$$e^{-x}\cos(x)$$

n'est pas la fonction nulle, par exemple :

$$e^{0}\cos(0) = 1.$$

Donc la fonction nulle n'est pas solution de (E), ce qui suffit à montrer que l'affirmation 5 est fausse.

Fin du devoir